TIJDSCHRIFT
VAN HET
NEDERLANDSCH RADIOGENOOTSCHAP

TIJDSCHRIFT

VAN HET

NEDERLANDSCH RADIOGENOOTSCHAP

DEEL IX

(MET INDEX VAN DEEL V TOT EN MET IX)

UITGEGEVEN DOOR HET
NEDERLANDSCH RADIOGENOOTSCHAP

Nederlandsch Radio Genootschap

INHOUD

SPONTANE SPANNINGS- EN STROOMFLUCTUATIES (RUISCHEN) IN ELECTRONENBUIZEN EN AANGESLOTEN KETENS

door

M. J. O. STRUTT

Natuurkundig Laboratorium der N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken, Eindhoven (Holland).

Voordracht, voor het Genootschap te Utrecht den 22en November 1940 gehouden.

Velen hebben wel eens door de microscoop de geringe warmtebewegingen van kleine vetdruppels waargenomen en zoo door eigen aanschouwing een levendige voorstelling verkregen van de Brownsche moleculaire warmtebeweging. Wij moeten ons met het denkbeeld vertrouwd maken, dat analoge verschijnselen ook bij electronen in stroomketens optreden. Deze verschijnselen openbaren zich door geringe spannings- en stroom-fluctuaties in deze ketens, welke na een behoorlijke versterking ook zeer goed gemeten kunnen worden.

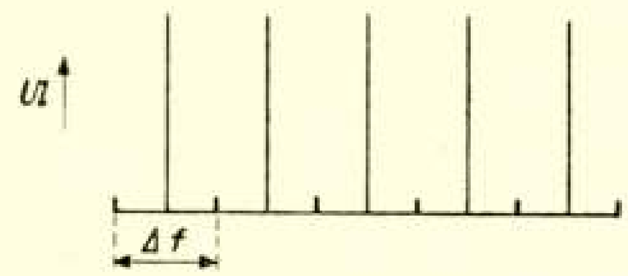
Teneinde de orde van grootte der optredende spanningsfluctuaties en stroomfluctuaties beter te kunnen overzien, beschouwen we het volgende geval (waarop mij Prof. Dr. G. Holst attent heeft gemaakt). Een condensator, bestaande uit twee vlakke parallele plaatjes, elk met een oppervlak van 10 cm^2 en een afstand van 1 cm (capaciteit ongeveer 0,9 pF) wordt tot een spanning van 1 μV opgeladen. De berekende lading bedraagt slechts 5,5 electronen. Bij dergelijke spanningen en ladingen zullen spontane fluctuaties onvermijdelijk zijn.

I. *Spanningsfluctuaties bij Ohmsche weerstanden en passieve tweepolen.*

Ia. *Spanningsfluctuaties bij Ohmsche weerstanden.*

Wij beschouwen een Ohmsche weerstand R, met de temperatuur T (absoluut gemeten, dus Cels. + 273°). Theoretische

en experimenteele uitkomsten voeren tot de opvatting, dat tengevolge van de warmtebeweging der electrische ladingen in de weerstand tusschen de klemmen van de weerstand geringe spanningsfluctuaties moeten optreden. Het gaat er dus in de eerste plaats om, een bruikbare maat voor deze spanningsfluctuaties te vinden. Hierbij is de integraalregel van Fourier van fundamenteele beteekenis. Volgens deze regel kan elke spanning, die een willekeurige functie van de tijd kan zijn, als integraal over amplituden van periodische tijdfuncties opgevat worden, waarbij elke amplitude tot een oneindig klein frequentie-interval behoort. Als toelichting beschouwen wij fig. 1. In deze figuur is horizon-



Figuur 1.
Frequentiespectrum van de spontane fluctuatiespanningen aan de klemmen van een weerstand. Horizontaal: frequentieschaal met frequentie-intervallen Δf. Vertikaal: spanningsamplitude, behoorende bij een frequentie-interval Δf.

taal een frequentieschaal geteekend, terwijl vertikaal de bij elk smal frequentie-interval Δf behoorende amplitude $\mathfrak{U}$ door een streep is aangegeven. Deze voorstelling wordt ook als „spectrum" aangeduid. Beschouwen wij een dergelijk frequentieinterval Δf, dan wordt de bijbehoorende effectieve spanning gegeven door de vergelijking (zie literatuurlijst No. *2, 4, 10, 12, 15, 20*):

$$\mathfrak{U}^2 = A\,\Delta f.$$

In deze vergelijking stelt voor elk eindig frequentie-interval Δf het symbool $\mathfrak{U}$ de effectieve waarde van een naar de tijd *fluctueerende* spanning voor. Wanneer men het frequentie-interval Δf zeer klein maakt, wordt de waarde van $\mathfrak{U}$ eveneens zeer klein, maar tevens vertoont $\mathfrak{U}$ steeds meer gelijkenis met een *wisselspanning* van een frequentie, gelegen binnen Δf. Deze voorstelling van $\mathfrak{U}$ als wisselspanning biedt vaak voordeelen, daar men dan in schakelingen op de spanning $\mathfrak{U}$ de complexe rekenwijze der wisselstroomtheorie kan toepassen, zooals we aan voorbeelden zullen toelichten. Analoge opmerkingen gelden voor fluctuatiestroomen.

De evenredigheid tusschen $\mathfrak{U}^2$ en Δf kan op de volgende

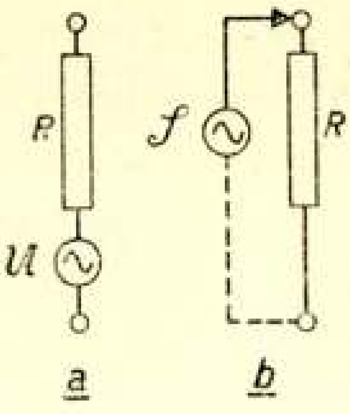
wijze worden ingezien. Wij beschouwen twee amplituden $\mathfrak{U}_1$ en $\mathfrak{U}_2$, welke bij twee naburige gelijke frequentie-intervallen Δf behooren. Dan kan men de resulteerende spanning $\mathfrak{U}_r$ volgens de vergelijking $\mathfrak{U}_r^2 = \mathfrak{U}_1^2 + \mathfrak{U}_2^2$ berekenen. Wanneer $\mathfrak{U}_1$ en $\mathfrak{U}_2$ even groot zijn, wordt de bij het frequentie-interval $2\,\Delta f$ behoorende spanning $\mathfrak{U}_r$ dus door $\mathfrak{U}_r^2 = 2\,\mathfrak{U}_1^2$ gegeven. $\mathfrak{U}^2$ is derhalve evenredig met Δf. Deze evenredigheid geldt voor het geheele in dit artikel beschouwde frequentiegebied (vanaf enkele *Hz* tot ongeveer 3.10^7 *Hz*) zoodat A in dit gebied onafhankelijk van de frequentie is. Men kan dit aldus uitdrukken: De thermische spanningsfluctuaties hebben een continu frequentiespectrum met constante amplitude. Het blijkt, dat A evenredig is met de Ohmsche weerstand R en met de absolute temperatuur T:

$$\mathfrak{U}^2 = 4kTR\Delta f \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 2)$$

De evenredigheidsfactor k wordt Boltzmannsche constante genoemd. Deze constante treft men op vele plaatsen in de theoretische physica aan en is van de orde van grootte $k = 1{,}37.10^{-23}$ Joule/Graad absoluut. Men kan er zich op eenvoudige wijze van overtuigen, dat de dimensies in verg. 2) kloppen, door links en rechts door R te deelen. Links staat dan Watt en rechts Joules/sec, dus ook Watt. Zoodra men $\mathfrak{U}^2/R$ evenredig aan kT stelt, wat op grond van overwegingen uit de theoretische physica voor de hand ligt, en bovendien evenredig met Δf (zie boven), dan komt men, indien de getallenfactor 4 toegevoegd wordt tot verg. 2). Deze vergelijking werd ook langs experimenteele weg bevestigd gevonden.

Elke Ohmsche weerstand kan derhalve als een spanningsbron opgevat worden, waarvan de effectieve spanning door 2) gegeven wordt. Wij kunnen voor deze spanningsbron twee schema's geven (zie *5*): 1. een spanningsbron $\mathfrak{U}$ in serie met de Ohmsche weerstand R (inwendige weerstand van de spanningsbron); 2. een stroombron $\mathfrak{J} = \mathfrak{U}/R$, waarvan de stroom door de Ohmsche weerstand R loopt (fig. 2).

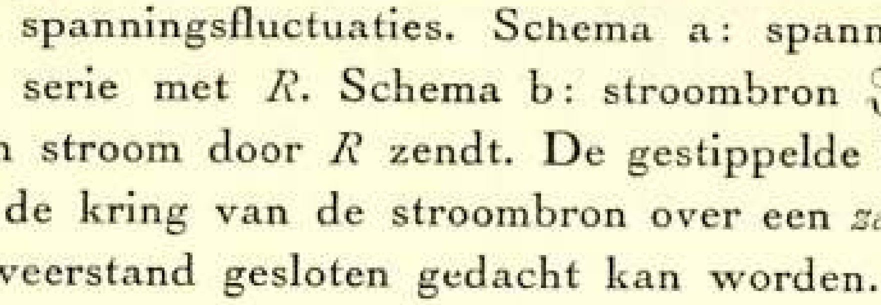
Hoe moeten verschillende effectieve fluctuatie-spanningen of -stroomen opgeteld worden? Hiertoe herinneren wij aan de boven reeds toegepaste regel uit de theorie voor wisselstroomen, volgens welke de resulteerende spanning van twee wisselspanningen $\mathfrak{U}_1$ en $\mathfrak{U}_2$ van verschillende frequentie uit de verg. $\mathfrak{U}^2 = \mathfrak{U}_1^2 + \mathfrak{U}_2^2$ berekend kan worden. Evenzoo geldt voor de resulteerende $\mathfrak{J}$ van twee stroomen $\mathfrak{J}_1$ en $\mathfrak{J}_2$ van verschillende frequentie: $\mathfrak{J}^2 = \mathfrak{J}_1^2 + \mathfrak{J}_2^2$. In ons geval houden de frequenties der verschil-



Figuur 2.
Vervangingsschema's voor een Ohmsche weerstand R als bron van spanningsfluctuaties. Schema a: spanningsbron $\mathfrak{U}$ in de serie met R. Schema b: stroombron $\mathfrak{J} = \mathfrak{U}/R$, welke een stroom door R zendt. De gestippelde lijn geeft aan, hoe de kring van de stroombron over een *zeer* groote weerstand gesloten gedacht kan worden.

lende fluctuatiestroomen en -spanningen geen verband met elkaar. Dientengevolge gelden ook in ons geval de genoemde optellingsregels.

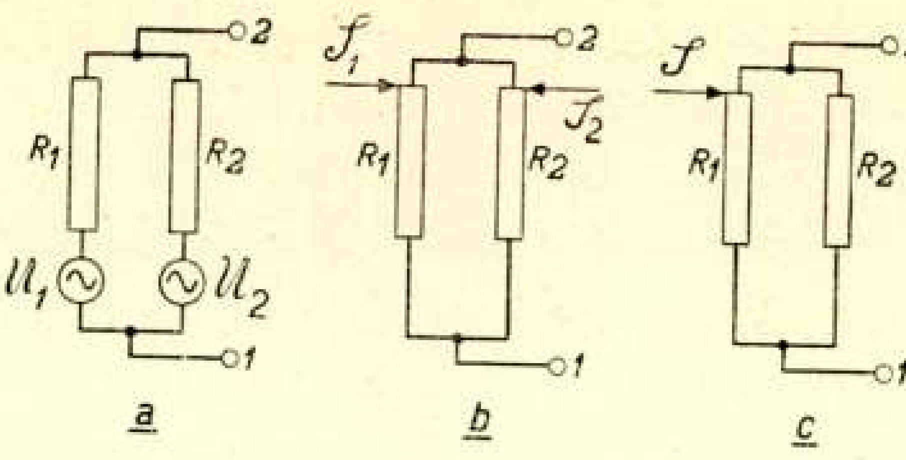
Als toepassing van schema a) in fig. 1 beschouwen wij de serieschakeling van twee Ohmsche weerstanden R_1 en R_2 met de absolute temperaturen T_1 en T_2. De effectieve spanning $\mathfrak{U}$ tusschen de klemmen van deze serieschakeling wordt $\mathfrak{U}^2 = \mathfrak{U}_1^2 + \mathfrak{U}_2^2$. Het equivalente schema der serieschakeling bevat een spanningsbron $\mathfrak{U}$ in serie met een weerstand $R_1 + R_2$ (fig. 3).



Figuur 3.
De fluctuatiespanning van twee Ohmsche weerstanden R_1 en R_2 in de serie geschakeld (a) wordt door schema b voorgesteld: een spanningsbron $\mathfrak{U}$ in de serie met de weerstand $R = R_1 + R_2$, waarbij $\mathfrak{U}^2 = \mathfrak{U}_1^2 + \mathfrak{U}_2^2$

Als toepassing van schema b) van fig. 1 beschouwen wij de parallelschakeling (zie *11, 15*) van twee Ohmsche weerstanden R_1 en R_2 met de temperaturen T_1 en T_2. Hiervoor kunnen wij de schema's fig. 4a of b nemen. Wij kiezen fig. 4b, en leiden hieruit schema fig. 4c af, door $\mathfrak{J}^2 = \mathfrak{J}_1^2 + \mathfrak{J}_2^2$ te stellen. Volgens het bovenstaande geldt:

$$\mathfrak{J}_1^2 = \frac{\mathfrak{U}_1^2}{R_1^2} = \frac{4kT_1\Delta f}{R_1} \quad \text{en} \quad \mathfrak{J}_2^2 = \frac{\mathfrak{U}_2^2}{R_2^2} = \frac{4kT_2\Delta f}{R_2}.$$



Figuur 4.

Schema's voor de door twee parallel geschakelde Ohmsche weerstanden R_1 en R_2 opgewekte fluctuatiespanning. Schema a: elke weerstand heeft een spanningsbron in serie. Schema b: elke weerstand heeft een stroombron parallel. Schema c: bij de resulteerende schakeling zijn de beide weerstanden parallel geschakeld, met een stroombron $\mathfrak{J}$, waarbij $\mathfrak{J}^2 = \mathfrak{J}_1^2 + \mathfrak{J}_2^2$.

De stroom $\mathfrak{J}$ wekt tusschen de klemmen 1 en 2 van fig. 4c de effectieve spanning:

$$\mathfrak{U} = \frac{\mathfrak{J} R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

op. Dientengevolge wordt:

$$\mathfrak{U}^2 = 4 k \Delta f \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right)^2 \left(\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

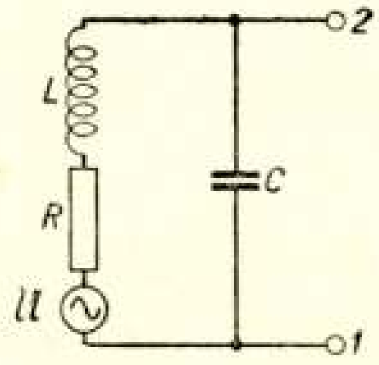
Deze formule 3) wordt zeer eenvoudig voor het geval $T_1 = T_2$, $\mathfrak{U}$ behoort dan bij een Ohmsche weerstand, die uit de parallelschakeling van R_1 en R_2 ontstaat. Experimenteel werd de formule 3) goed bevestigd gevonden.

Een interessante kwestie hangt met de spontane spannningsfluctuaties in ontvangantennes samen. Een dergelijke antenne kan, wanneer zij afgestemd is, aan haar aansluitklemmen als een Ohmsche weerstand beschouwd worden. Physisch komt deze weerstand meestal bijna geheel met de „stralingsweerstand" van de antenne overeen en slechts een klein gedeelte is van de Ohmsche weerstand van de antennedraad afkomstig. Welke temperatuur heeft nu deze stralingsweerstand? Al naarmate de deelen er van verband houden met de absorptie der onmiddellijke omgeving, de atmospheer, of de wereldruimte, zou deze temperatuur theoretisch varieeren tusschen bijna nul graad absoluut en de temperatuur van de omgeving. In werkelijkheid is echter

bij metingen voor frequenties van ongeveer 20 MHz gebleken, dat dergelijke antennes schijnbaar vanuit de wereldruimte tot ons komende spanningsfluctuaties ontvangen (zie *7* en *8*). Wanneer men deze fluctuaties wederom door de temperatuur van de stralingsweerstand wil karakteriseeren, dan zou men deze op een veelvoud (bijv. 2 tot 4) van de temperatuur der omgeving moeten brengen. Verdere metingen betreffende dit interessante verschijnsel zullen nog worden verricht. Door de huidige nieuwe ontwikkeling van ruischarme buizen voor korte golven zijn nauwkeurige metingen van deze aard goed mogelijk geworden.

Ib. *Spanningsfluctuaties in passieve tweepolen.*

Met behulp van de in fig. 1 gegeven schema's voor de spannings- en stroomfluctuaties in Ohmsche weerstanden kunnen wij deze grootheden voor willekeurige tweepolen berekenen, indien wij aannemen, dat deze tweepolen geen spannings- resp. stroombronnen buiten de *Ohmsche* weerstanden bevatten. Speciaal de zelfinducties en capaciteiten moeten dus *niet* als bronnen van spannings- of stroomfluctuaties beschouwd worden. Experimenteel werd deze regel daaruit afgeleid, dat een temperatuurverhooging van deze schakelelementen, afgezien van hun onvermijdelijk aandeel aan de Ohmsche weerstanden (tengevolge van verliezen), geen verandering van de totale fluctuaties in tweepolen veroorzaakte (zie *11*, *25*).



Figuur 5.

De fluctuatiespanning tusschen de klemmen 1 en 2 van een trillingskring kan berekend worden, wanneer men in serie met de Ohmsche weerstand de bijbehoorende spanningsbron 𝔘 schakelt.

Wanneer het frequentie-interval Δf, behoorende bij de effectieve spanning 𝔘, resp. de effectieve stroom 𝔍, voldoende smal is, verschillen deze spanningen resp. stroomen slechts weinig van éengolvige wisselspanningen en -stroomen. Wij zullen derhalve

bij de verdere berekening aannemen, dat $\mathfrak{U}$ en $\mathfrak{J}$ ééngolvige wisselspanningen en wisselstroomen zijn, welke bij een bepaalde hoekfrequentie ω behooren.

Als eerste voorbeeld beschouwen wij de in fig. 5 gegeven schakeling en berekenen de effectieve spanningsfluctuatie $\mathfrak{U}_1$ tusschen de klemmen *1* en *2*. De effectieve fluctuatiespanning $\mathfrak{U}$ wekt een stroom $\mathfrak{J}$ op door de serieschakeling:

$$\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{J}} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}.$$

Bijgevolg bedraagt de spanning $\mathfrak{U}_1$ tusschen 1 en 2:

$$\mathfrak{U}_1 = \frac{\mathfrak{J}}{j\omega C} = \frac{\mathfrak{U}}{\left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) j\omega C} = \frac{\mathfrak{U}}{j\omega CR - \omega^2 LC + 1}$$

of

$$|\mathfrak{U}_1^2| = \frac{\mathfrak{U}^2}{\omega^2 C^2 R^2 + (1 - \omega^2 LC)^2} = \frac{4kTR\Delta f}{\omega^2 C^2 R^2 + (1 - \omega^2 LC)^2} \qquad 4)$$

De complexe weerstand der schakeling fig. 5 tusschen de klemmen 1 en 2 bedraagt:

$$\mathfrak{R} = \left(j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L}\right)^{-1} = \frac{R + j\omega L}{j\omega CR + 1 - \omega^2 LC} =$$

$$= \frac{R}{\omega^2 C^2 R^2 + (1 - \omega^2 LC)^2} + j\frac{L(1 - \omega^2 LC) - \omega CR^2}{\omega^2 C^2 R^2 + (1 - \omega^2 LC)^2}. \qquad 5)$$

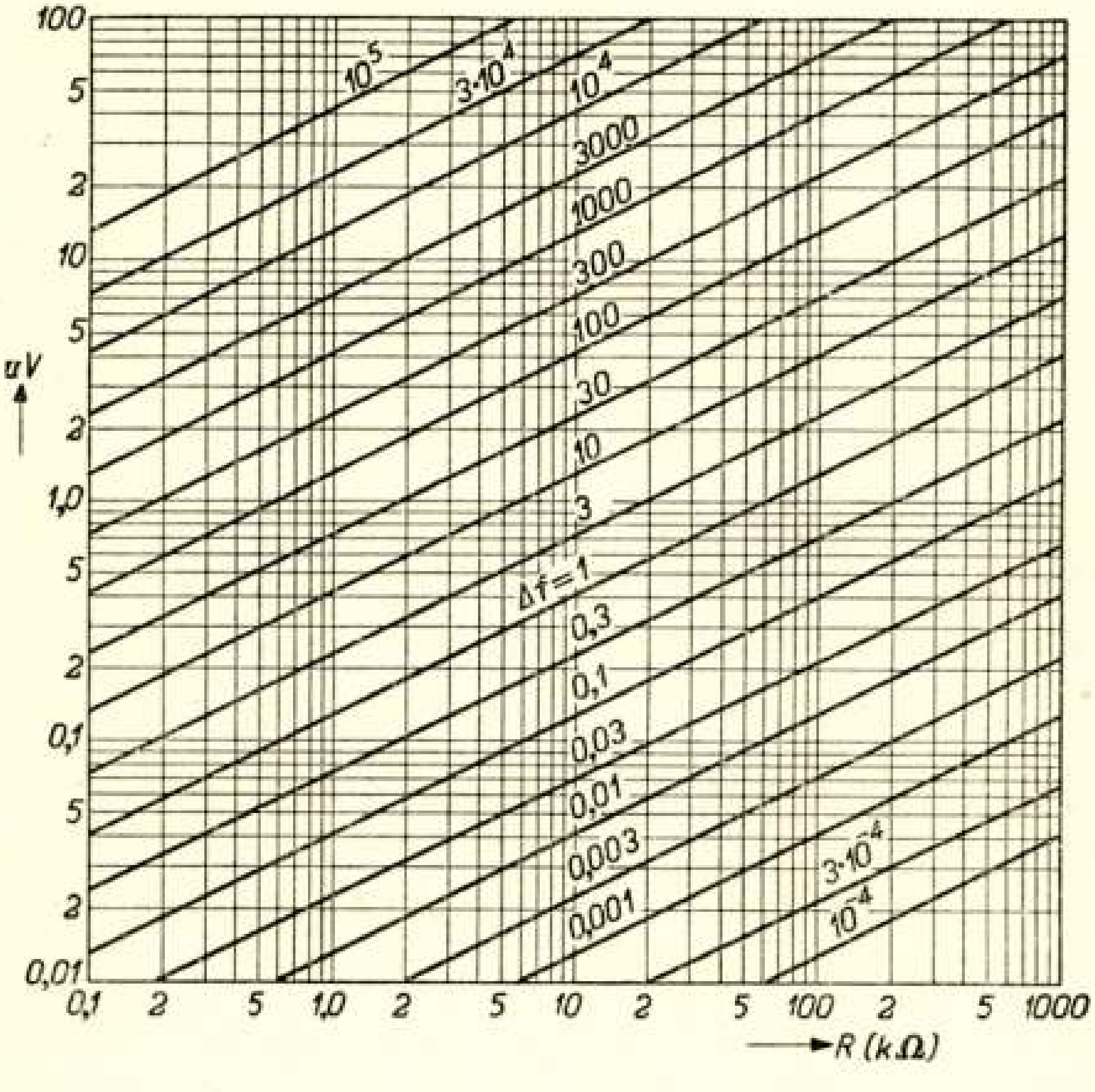
Bij vergelijking van de formules 4) en 5) blijkt, dat *in de formule voor de waarde* $\mathfrak{U}_1^2$ *het reëele deel van de complexe weerstand* $\mathfrak{R}$ *tusschen tusschen de klemmen 1 en 2 optreedt.* Deze regel vindt men voor passieve tweepolen algemeen bevestigd (*10, 12*).

Ic. *Het begrip „equivalente ruischweerstand"*

De boven besproken spontane spannings- en stroomfluctuaties worden vaak algemeen door „ruischen" aangeduid. Deze benaming past zich aan bij de acoustische uitingen van de genoemde verschijnselen in radio-ontvangers. Ieder kent het in de luidspreker hoorbare gesis, dat bij de ontvangst van zwakke zenders optreedt. De oorzaak van dit gesis houdt nauw verband met

de behandelde fluctuaties. Wij kunnen in plaats van de gegeven effectieve waarden voor de spanningsfluctuaties van een schakeling ook de waarde van de weerstand (op kamertemperatuur, dus T gelijk ongeveer 300 graden absoluut) beschouwen, welke dezelfde effectieve spanningsfluctuatie aan zijn klemmen opwekt als de schakeling aan haar uiteinden. Deze weerstandswaarde noemen wij „equivalente ruischweerstand" en nemen deze als maat voor het ruischen van een tweepool.

Om de ruischweerstand direct en op gemakkelijke wijze in de bijbehoorende „ruischspanning" te kunnen omzetten, is formule 2), die beide waarden met elkaar verbindt, in fig. 6 graphisch weergegeven.



Figuur 6.
Effectieve spanningsfluctuatie in microvolts (verticaal) aan de klemmen van een Ohmsche weerstand R (horizontaal) op kamertemperatuur, bij een frequentie-interval Δf (bij de rechte lijnen in kHz aangegeven).

Wij passen thans het begrip „equivalente ruischweerstand" op de schakelingen der hoofdstukken Ia en Ib toe. Allereerst op het schema van fig. 3. Hier is blijkbaar de equivalente ruischweerstand R gelijk aan $R_1 + R_2$. De temperaturen van R_1 en R_2 zijn gelijk verondersteld. De aandacht zij er op gevestigd, dat deze optellingsformule eenvoudiger is dan de kwadratische optellingsformule voor de effectieve fluctuatiespanningen. Een voor-

deel van het begrip „equivalente ruischweerstand" is verder, dat men geen frequentie-interval Δf behoeft op te geven.

In het geval van fig. 4 nemen wij aan, dat de weerstand R_1 kamertemperatuur (T_1) heeft en schrijven formule 3) als volgt:

$$\mathfrak{U}^2 = 4kT_1\,\Delta f R_1 \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)^2 \left(1 + \frac{T_2 R_1}{T_1 R_2}\right).$$

Klaarblijkelijk is de equivalente ruischweerstand R:

$$R = R_1 \left(\frac{1}{1 + \dfrac{R_1}{R_2}}\right)^2 \left(1 + \frac{T_2}{T_1}\frac{R_1}{R_2}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; 6)$$

Al naarmate het product der beide tusschen haakjes geplaatste uitdrukkingen — van welke de eerste kleiner dan 1 en de tweede grooter dan 1 is — uitvalt, wordt R grooter of kleiner dan R_1. Voor $T_1 = T_2$ wordt $R = R_1 R_2/(R_1 + R_2)$.

In het geval van fig. 5 is iets meer overweging noodig om tot de equivalente ruischweerstand te komen. De uitdrukking 4) voor de effectieve spanningsfluctuatie geldt slechts voor een zeer klein frequentie-interval Δf rondom de beschouwde frequentie $\omega/2\pi$. Meestal wenscht men, dat de equivalente ruischweerstand het „ruischen" (dwz. de effectieve spanningsfluctuaties) van de kring in een grooter frequentiegebied moet weergeven. Wij geven hiervoor twee voorbeelden.

Als eerste voorbeeld nemen wij aan, dat het genoemde frequentiegebied zeer groot is (theoretisch van 0 tot ∞). Wij stellen $\omega_0^2 LC = 1$ en $\omega_1 = \omega - \omega_0$. Wanneer ω van 0 tot ∞ verloopt verandert ω_1 van $-\omega_0$ tot ∞. Het reëele deel van de complexe kringweerstand is dan bij benadering (vgl. verg. 5):

$$\mathrm{Re}\,(\mathfrak{R}) = \frac{R_1}{1 + \dfrac{\omega_1^2}{\pi^2 B^2}}, \text{ met } R_1 = L/CR \text{ en } B = \frac{R}{2\pi L}.$$

Men noemt B (dimensie van een frequentie) vaak de *bandbreedte* van een trillingskring. De effectieve fluctuatiespanning wordt onder de veronderstelling $\omega_0 >> B$:

$$(\mathfrak{U}_1^2)_{\Delta f=\infty} = \int_{-\omega_0}^{\infty} 4kT\,Re(\mathfrak{R})\,\frac{d\omega_1}{2\pi} \approx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$

$$\frac{4}{2\pi}\,kTR_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_1}{1+\frac{\omega_1^2}{\pi^2 B^2}} = kTR_1 B\,.\,\frac{\pi}{2}\,.$$

De equivalente ruischweerstand van de kring kan dus volgens deze vergelijking 7) gelijk $R_1\pi/2$ genomen worden, wanneer B in plaats van het frequentie-interval Δf gebruikt wordt.

Als tweede voorbeeld nemen wij aan, dat het frequentiegebied van de ruischspanning symmetrisch om ω_0 heen ligt en een breedte B heeft. Hierbij verloopt ω_1 van $-\pi B$ tot $+\pi B$ en deze integratielimieten moeten in plaats van die van verg. 7) gebruikt worden. Men verkrijgt dan:

$$(\mathfrak{U}_1^2)_{\Delta f=B} = 4kTR_1 B\frac{\pi}{4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$

In dat geval is dus de equivalente ruischweerstand van de trillingskring gelijk aan $R_1\pi/4$.

Wij merken nog op, dat het reëele deel van de wisselstroomweerstand $\mathfrak{R}$ voor $\omega = \omega_0$ gelijk aan R_1 wordt.

Voor een zeer klein frequentie-interval Δf om ω_0 heen wordt:

$$\mathfrak{U}_1^2 = 4kTR_1\Delta f\,.$$

De equivalente ruischweerstand van de kring is dus in dit geval gelijk aan R_1.

II. *Spanningsfluctuaties en stroomfluctuaties in dioden en trioden.*

IIa. *Spannings- en stroomfluctuaties in dioden en fotocellen.*

Wij beschouwen een diode, waarvan de cathode negatief geladen deeltjes (electronen) met de elementaire lading $-e_1$ emitteert. De anodestroom I_a van een diode hangt, zoolang hij klein is (eenige microamperes) volgens een exponentieele wet van de anodespanning U t.o.v. de cathode af:

$$I_a = Ae^{aU} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9)$$

Theoretisch kan worden aangetoond, dat de constante a gelijk aan e_1/kT_k is (e_1 lading der geëmitteerde deeltjes, k Boltzmann-constante, T_k absolute temperatuur der cathode). Wij leggen

bij onze diode een zoodanige gelijkspanning U tusschen cathode en anode aan, dat de wet 9) geldt, en berekenen nu de verandering dI_a van deze stroom bij een kleine spanningsvariatie dU:

$$\frac{dI_a}{dU} = aI_a = \frac{e_1}{kT_k} \cdot I_a \quad \ldots\ldots \quad 10)$$

De reciproke waarde van de uitdrukking 10) noemen wij de inwendige weerstand R_i der diode.

Evenals in hoofdstuk I gaan wij uit van de stelling, dat een Ohmsche weerstand R_i met de temperatuur T_R aan zijn klemmen een effectieve spanningsfluctuatie $\mathfrak{U}$ volgens de vergelijking:

$$\mathfrak{U}^2 = 4\,kT_R R_i \Delta f \quad \ldots\ldots \quad 11)$$

vertoont en passen deze regel op de door ons beschouwde diode toe, waarbij volgens 10) geldt:

$$R_i = \frac{dU}{dI_a} = \frac{kT_k}{e_1 I_a} \quad \ldots\ldots \quad 12)$$

Welke temperatuur moeten wij nu voor de inwendige weerstand R_i van onze diode als basis nemen bij de berekening? De temperatuur der cathode is T_k, die van de anode veel lager (bijv. 1100 en 300 graad absoluut). Men zou als eerste benadering de temperatuur $T_R = T_k/2$ voor R_i kunnen aannemen. Inderdaad wordt dan formule 11) door experimenteele uitkomsten gedekt.

In plaats van de fluctuatiespanning $\mathfrak{U}$ volgens verg. 11) kan ook de fluctuatiestroom $\mathfrak{J} = \mathfrak{U}/R_i$:

$$\mathfrak{J}^2 = \mathfrak{U}^2/R_i^2 = 2\,e_1 I_a \Delta f \quad \ldots\ldots \quad 13)$$

berekend worden (*16, 17*). Deze formule 13) kan direct uit statistische beschouwingen van de stroomovergang in een diode (Shoteffect) worden afgeleid: $\mathfrak{J}^2$ zal evenredig zijn met I_a, omdat bij het parallel schakelen van twee gelijke dioden $\mathfrak{J}^2$ verdubbeld wordt. Verder is $\mathfrak{J}^2$ evenredig met Δf (vergl. hoofdstuk Ia). Op grond der dimensies zal $\mathfrak{J}^2$ dan tenslotte evenredig moeten zijn met een lading. Uit de berekening resulteert een factor $2e_1$. Formule 13) geldt ook voor dioden in het *verzadigings-stroomgebied* (waar R_i oneindig groot is).

Langs experimenteele weg werd aangetoond, dat formule 13) ook voor *fotocellen* geldt, dus voor dioden, waarvan de cathode

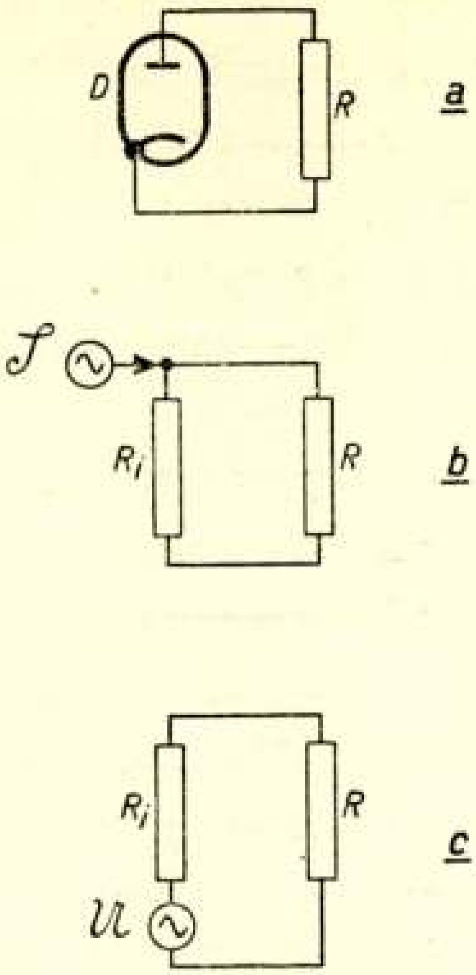
niet door verwarming, doch door bestraling met licht electronen gaat emitteeren. De totale geëmitteerde stroom wordt daarbij, evenals boven, door I_a aangeduid. Bij zulke fotocellen, waarvan de cathode kamertemperatuur heeft, is het moeilijker te verklaren, waarom volgens de eerstgenoemde overwegingen de temperatuur van de inwendige weerstand slechts de helft van die van de cathode zou zijn.

Bij onze eerste beschouwingen van de diode zijn wij uitgegaan van verg. 9), die echter slechts voor zeer kleine diodestroomen geldt, zoolang de genoemde exponentiëele wet voor stroom en spanning geldt, hetgeen voor stroomen van enkele microampère gewoonlijk het geval is. Hoe zijn nu de verhoudingen bij grootere stroomsterkten, waarvoor verg. 9) niet meer geldig is? Zoowel experimenteel als theoretisch werd gevonden, dat in die gevallen ook verg. 11) toegepast kan worden indien T_R gelijk ongeveer $5\,T_k/8$ (temperatuur der cathode) wordt gekozen en R_i *onder de geldende bedrijfsvoorwaarden* de effectieve inwendige weerstand der diode is (dwz. dU/dI_a). Hierdoor komt men dan tot een formule, waarvan het geldigheidsbereik bijna tot de verzadigingsstroom van de diode reikt (*6, 18, 21*). Voor de ruischstroom geldt in dat geval de formule 14):

$$\mathfrak{J}^2 = 2\,F^2 I_a e_1\, \Delta f, \qquad \text{met} \qquad F^2 = \frac{5}{4}\,\frac{k T_k}{R_i e_1 I_a} \quad . \quad . \quad 14)$$

De grootheid F^2 wordt in deze formule steeds kleiner dan *1*, bijv. in practische gevallen *0,2*. Men spreekt derhalve van een „verzwakking tengevolge van de ruimtelading" der stroomfluctuaties in een diode.

Bovenstaande overwegingen zouden bij den lezer de indruk kunnen wekken, alsof een diode in een schakeling vervangen zou kunnen worden door een ruischende weerstand op halve cathodetemperatuur. Dit is echter geenszins het geval. De inwendige weerstand op halve cathodetemperatuur dient slechts om de door de diode in het aanloopstroomgebied opgewekte ruischspanning aannemelijk te maken. De voor het ruischen der diode belangrijke eindformules zijn de verg. 13) en 14). Als equivalent schema voor de diode kunnen wij b.v. de inwendige weerstand R_i (op kamertemperatuur) met een fluctuatiestroombron $\mathfrak{J}$ nemen. Als toelichting diene fig. 7. Men kan echter ook uitgaan van een spanningsbron $\mathfrak{U}$ (verg. 11), in serie met de inwendige weerstand R_i (op kamertemperatuur) (fig. 7c). De stroomsterkte $\mathfrak{J}$ kan in het aanloopstroomgebied en in het vezadigings-



Figuur 7.

Vervangingsschema's voor de door een diode opgewekte fluctuatiespanning en -stroom. Schema a: Schakeling van de diode D in serie met de Ohmsche weerstand R. Schema b: de diode wordt, wat de fluctuatie aangaat, door een stroombron $\mathfrak{J}$ en de effectieve inwendige weerstand R_i (op kamertemperatuur) voorgesteld. Schema c: de diode wordt door een spanningsbron $\mathfrak{U}$ in serie met de inwendige weerstand R_i weergegeven.

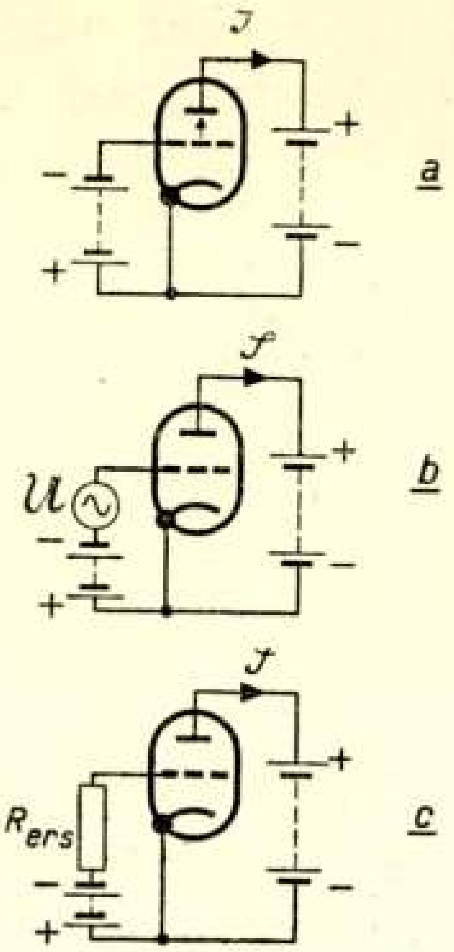
gebied der diode volgens verg. 13) en verder (bijna tot verzadiging) volgens verg. 14) berekend worden.

IIb. *Spanningsfluctuaties en stroomfluctuaties in trioden.*

Een triode kan als diode met een afzonderlijke stuurelectrode (rooster) opgevat worden. In de anodestroom van een triode vindt men een soortgelijk effectief fluctuatieaandeel als in de anodestroom van een diode. Wanneer wij deze anodegelijkstroom evenals bij de diode, door I_a aangeven, dan geldt voor dit fluctuatieaandeel $\mathfrak{J}$ van de anodestroom (verg. 14)):

$$\mathfrak{J}^2 = 2F^2 e_1 I_a \Delta f, \quad \text{met} \quad F^2 = \frac{5}{4}\frac{kT_k}{R_i e_1 I_a} \quad . \quad . \quad 14)$$

Deze fluctuatiestroom vloeit door de anodeketen, wanneer de anode door een zeer kleine weerstand (bijv. de anodebatterij) met de cathode verbonden is, terwijl zich tusschen stuurrooster en cathode eveneens slechts een zeer kleine weerstand (bijv.



Figuur 8.

Fluctuatie-schema's van een triode. Schema a: schakeling van de triode met de anodefluctuatiestroom $\mathfrak{J}$. Schema b: wij stellen de werkelijke triode door een ideale triode, welke geen fluctuaties veroorzaakt, voor; in de roosterkring van deze triode is een fluctuatiespanning $\mathfrak{U}$ geschakeld. Schema c: beeld van een ideale triode; in de roosterkring is een Ohmsche weerstand (vervangingsruischweerstand) als bron van fluctuatiespanningen opgenomen. In de gevallen b en c wordt in de anodeketen weer de fluctuatiestroom $\mathfrak{J}$ opgewekt.

batterij voor de negatieve roosterspanning) bevindt. Voor alle frequenties van de stroom $\mathfrak{J}$ is dus zoowel de anodeketen als de roosterkring kortgesloten (fig. 8a), dwz. de geheele schakeling mag als eenige ruischbron slechts de beschouwde triode bevatten.

Wij vervangen thans de werkelijke triode door een ideale, niet-ruischende buis. Bij kortgesloten rooster-cathode-kring fluctueert de anodestroom van deze ideale buis *niet* meer. Tusschen rooster en cathode plaatsen wij nu een spanningsbron (fig. 8b), die een zoodanige effectieve fluctuatiespanning levert, dat in de anodeketen weer dezelfde fluctuatiestroom vloeit als — onder dezelfde bedrijfsvoorwaarden — in de werkelijke ruischende buis (fig. 8a) met kortgesloten rooster-cathode-kring. De effectieve spanning $\mathfrak{U}_{ers}$ van de bron wordt berekend uit de formule $\mathfrak{J}/S$, waarbij S de steilheid der triode is, dus:

$$\mathfrak{U}^2_{ers} = 2F^2 e_1 I_a \Delta f / S^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 15$$

Wij kunnen ons deze effectieve fluctuatiespanning ook ontstaan denken door het ruischen van een weerstand R_{ers} op kamertemperatuur T (fig. 8c). De door een dergelijke weerstand opgewekte spanning is:

$$\mathfrak{U}^2 = 4kTR_{ers}\Delta f \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 16)$$

Gelijkstelling van 15) en 16) geeft:

$$R_{ers} = \frac{F^2 e_1 I_a}{2kTS^2} = 2{,}0.10^4 \frac{I_a}{S^2} F^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; 17)$$

In het laatste deel van verg. 17) is I_a in mA, S in mA/V gegeven, terwijl $T = 290^0$ absoluut genomen is. Hierdoor zijn wij tot het begrip *„vervangingsruischweerstand aan het rooster van een triode"* gekomen. Deze weerstand vervangt, wat het ruischen betreft, de buis volkomen (zie b.v. *22*).

De in de formules 15), 16) en 17) optredende grootheid F^2 kan volgens verg. 14) berekend worden uit de inwendige weerstand der „diode", welke tusschen cathode en rooster wordt gevormd. Eenvoudiger is echter de volgende half-empirische formule, die voor de meeste tegenwoordige buizen zeer goed bruikbaar is:

$$F^2 \approx 0{,}20 \frac{S\, mA/V}{I_a\, mA} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 18)$$

Bij toepassing van deze uitdrukking in verg. 17) moeten de stroomen in mA en de steilheid in mA/V uitgedrukt worden en men verkrijgt dan R_{ers} in Ohm.

Wanneer een triode in een schakeling samen met passieve tweepolen optreedt, kan zij, wat het ruischen betreft, in de anodeketen vervangen worden door een stroombron $\mathfrak{J}$ volgens verg. 14) en de weerstand R_a tusschen anode en cathode op kamertemperatuur, of door een spanningsbron $\mathfrak{U} = \mathfrak{J}/R_a$ in serie met R_a. Wij verwijzen daarbij naar fig. 7, die ook voor de anodeketen van een triode geldt, vergelijk ook (*27*).

IIc. *Vonkeleffect.*

In de hoofdstukken IIa en IIb hebben wij ons slechts beperkt tot stroom- en spanningsfluctuaties, die direct met de warmtebeweging der electrische elementaire ladingen verband houden. Dit effect vormt de hoofdoorzaak voor de bij versterkers waar-

genomen ruischstoringen, voorzoover het frequenties boven ongeveer *1 kHz* betreft. Onder deze grens doet zich in buizen nog een tweede oorzaak voor, welke we vonkeleffect (Engelsch: flickereffect) noemen (*9, 11, 13*).

In de cathode, en speciaal aan haar oppervlak, treden gedurende het bedrijf als bron van electronenemissie mechanische veranderingen en omkristallisaties op, welke de electronenemissie beïnvloeden en zoodoende tot stroomfluctuaties in de anodeketen aanleiding geven. Deze fluctuaties kunnen bijv. bij frequenties, gelegen tusschen eenige en eenige honderden *Hz* ongeveer het twee- tot tienvoudige van de bovenbehandelde fluctuaties bedragen. Door speciaal bewerkte cathodes te gebruiken, kan men dit vonkeleffect sterk verminderen. De berekening van de invloed van dit verschijnsel op schakelingen kan op dezelfde wijze als boven gegeven geschieden, echter is F^2 grooter (*13*).

III. *Fluctuaties in meerroosterbuizen en in secundaire emissiebuizen.*

IIIa. *Fluctuaties tengevolge van de stroomverdeeling.*

Wij beschouwen thans een electronenstroom, die deels door de mazen van een rooster met positieve potentiaal op een tweede electrode (anode) met positieve potentiaal komt, deels op het genoemde rooster belandt. Voor elk der voor het rooster komende electronen bestaat een zekere kans, dat het op het rooster of op de anode komt. Wanneer dit kansspel gedurende een bepaalde — in gelijke perioden verdeelde — tijd voortgaat, zal het aantal der op het rooster aankomende electronen gedurende deze perioden niet steeds hetzelfde zijn (en dit geldt ook voor de op de anode komende electronen), doch er heeft een bepaalde fluctuatie van de stroom naar het rooster en naar de anode toe plaats. Deze fluctuatie noemen wij: *stroomverdeelingsfluctuatie* (*1, 19*).

Een dergelijke fluctuatie treedt in al die gevallen op, waarbij een electronenstroom door electrische of magnetische velden zoo gestuurd wordt, dat hij deels op één, deels op een andere positieve electrode terecht komt. De sterkte van deze fluctuaties hangt van de condities voor ieder afzonderlijk geval af.

De stroomverdeelingsfluctuaties vormen een op zichzelf staande bron van stroomfluctuaties. Beschouwen wij een tetrode (cathode, stuurrooster met negatieve voorspanning, schermrooster met positieve spanning, anode met positieve spanning), dan vertoont de vóór het schermrooster aankomende electronenstroom

reeds op zichzelf bepaalde stroomfluctuaties, welke wij in hoofdstuk IIb reeds bespraken. De anodestroom I_a fluctueert tengevolge van de bijkomende fluctuaties van de stroomverdeeling sterker dan de vóór het schermrooster aankomende electronenstroom (cathodestroom) $I_k = I_a + I_{g2}$ (I_{g2} gelijkstroom naar het schermrooster).

De effectieve fluctuatie $\mathfrak{J}_{g2}$ van de schermroosterstroom als gevolg van genoemde fluctuaties van de verdeelingsstroom bedraagt:

$$\mathfrak{J}^2_{g2} = 2\,e_I\,\frac{I_a I_{g2}}{I_a + I_{g2}}\,\Delta f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 19)$$

Wij maken er op attent, dat deze formule groote overeenkomst vertoont met verg. 13) voor de effectieve stroomfluctuaties in een diode in het aanloopstroomgebied. Deze overeenkomst treedt vooral aan de dag, wanneer $I_{g2} \ll I_a$ is. Dezelfde uitdrukking geldt ook voor de effectieve fluctuatie $\mathfrak{J}_{av}$ van de anodestroom als gevolg van de stroomverdeeling:

$$\mathfrak{J}^2_{av} = 2\,e_I\,\frac{I_a I_{g2}}{I_a + I_{g2}}\,\Delta f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 20)$$

Men kan de formules 19) en 20) op eenvoudige wijze afleiden. Hierbij moeten wij overwegen, dat de fluctuatie van de verdeelingsstroom in de uitwendige keten van de buis van het schermrooster naar de anode loopt. Dientengevolge is zij een symmetrische functie van I_a en I_{g2}. Verder wordt het kwadraat van deze fluctuatie verdubbeld, wanneer alle gelijkstroomen verdubbeld worden. Voor $I_a \ll I_{g2}$ moeten wij voor de stroomfluctuatie formule 13) voor een diode zonder ruimtelading verkrijgen, daar wij in ons geval de ruimtelading tusschen schermrooster en anode mogen verwaarloozen. De symmetrische functie van I_a en I_{g2}, welke aan deze eischen voldoet, is $I_a I_{g2}/(I_a + I_{g2})$ en de evenredigheidsfactor $2\,e_I\,\Delta f$ resulteert uit laatstgenoemde eisch.

Wanneer wij de totale fluctuatie $\mathfrak{J}_a$ van de anodestroom, welke het gevolg is van de stroomverdeeling en de fluctuatie $\mathfrak{J}_k$ van de cathodestroom $I_k = I_a + I_{g2}$ willen bepalen, moeten wij bedenken, dat de formules van hoofdstuk IIb voor laatstgenoemde fluctuatie geven (zie verg. 14):

$$\mathfrak{J}^2_k = 2\,e_I I_k F^2_k\,\Delta f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 21)$$

Hierbij wordt de dimensielooze factor F_k^2 door formule 18) gegeven:

$$F_k^2 \approx 0{,}20 \frac{S_k \, mA/V}{I_k \; mA} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 22)$$

Met S_k (steilheid van de cathodestroom) wordt een kleine verandering van de cathodestroom I_k, gedeeld door de bijbehoorende verandering van stuurroosterspanning, aangeduid. Deze fluctuaties $\mathfrak{I}_k$ van de cathodestroom I_k vertoonen zich slechts voor een deel $\mathfrak{I}_{ak} = I_a/I_k$ in de anodestroom. Dientengevolge wordt de totale fluctuatie $\mathfrak{I}_a$ van de anodestroom volgens de kwadratische optellingswet voor onafhankelijke fluctuaties:

$$\mathfrak{I}_a^2 = \mathfrak{I}_{av}^2 + \mathfrak{I}_{ak}^2 = 2e_1 I_a \frac{I_{g2}}{I_k} \Delta f + 2e_1 \frac{I_a^2}{I_k^2} I_k F_k^2 \Delta f$$

$$\mathfrak{I}_a^2 = 2e_1 I_a F_a^2 \Delta f, \quad \text{met} \quad F_a^2 = \frac{I_{g2} + F_k^2 I_a}{I_k} \quad . \; . \; . \quad 23)$$

Verg. 23), die experimenteel bevestigd werd, toont in vele gevallen een aanzienlijke vergrooting der anodestroomfluctuaties van een tetrode tegenover die van een triode met gelijke anodestroom. Voorbeeld met getallen: Triode met $S = 2\,mA/V$, $I_a = 2\,mA$, $F^2 = 0.20$. Tetrode met $S_k = 3\,mA/V$, $I_k = 3\,mA$, $I_a = 2\,mA$, $I_{g2} = 1\,mA$, $F_k^2 = 0{,}20$, $F_a^2 = 0{,}47$. De effectieve kwadratische stroomfluctuatie $\mathfrak{I}_a^2$ bedraagt dus voor de tetrode bijna het *2,4*-voudige van de waarde voor de triode.

Bovenstaande overwegingen zijn zoo algemeen gehouden, dat ze ook toegepast kunnen worden op buizen, waarin de electronenstroom tusschen cathode en anode meerdere stroomverdeelingen ondergaat. Als voorbeeld nemen wij een buis met een stuurrooster (negatieve spanning), een schermrooster *g2* (positieve spanning), een tweede schermrooster *g3* (positieve spanning) en een anode (positieve spanning). De cathodestroom I_k wordt gedeeltelijk door het tweede rooster (*g2*) opgevangen. Het door *g2* stroomende deel van I_k noemen wij I_{k1}. De effectieve fluctuatie $\mathfrak{I}_{k1}$ van deze stroom I_{k1} wordt door de direct uit verg. 23) volgende formule:

$$\mathfrak{I}_{k1}^2 = 2e_1 I_{k1} F_{k1}^2 \Delta f, \quad \text{met} \quad F_{k1}^2 = \frac{I_{g2} + F_k^2 I_{k1}}{I_k}$$

gegeven. Van de stroom I_{k1} wordt deel I_{g3} door het rooster $g3$ opgevangen. De fluctuatie $\mathfrak{J}_a$ van de anodestroom wordt gegeven door de formule:

$$\mathfrak{J}_a^2 = 2e_1 I_a \frac{I_{g3}}{I_{k1}} \Delta f + 2e_1 \frac{I_a^2}{I_{k1}^2} I_{k1} F_{k1}^2 \Delta f = 2e_1 I_a F_a^2 \Delta f,$$

$$\text{met } F_a^2 = \frac{I_{g3} + F_{k1}^2 I_a}{I_{k1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 24)$$

Voorbeeld met getallen: $I_k = 6\,mA$, $I_{g2} = 2\,mA$, $I_{k1} = 4\,mA$, $S_k = 6\,mA/V$, $F_k^2 = 0{,}20$, $F_{k1}^2 = 2{,}8/6 = 0{,}47$, $I_{g3} = 2\,mA$, $I_a = 2mA$, $F_a^2 = 0{,}73$. De anodestroomfluctuatie is dus ten opzichte van een triode met gelijke anodestroom en ten opzichte van een tetrode met gelijke anodestroom nog aanzienlijk grooter geworden.

Ook voor meerroosterbuizen kunnen wij de in verg. 17) gebruikte vervangingsruischweerstand aan het rooster definieeren:

$$R_{ers}(Ohm) = 2{,}0 \cdot 10^4 \cdot \frac{I_a}{S_a^2} F_a^2 \quad \ldots\ldots \quad 25)$$

waarbij I_a in mA, S_a in mA/V uitgedrukt is, terwijl voor de dimensielooze grootheid F_a^2 verg. 24) geldt. Ter vergelijking zijn enkele getallen voor moderne buizen in een tabel samengevat, waarbij de waarden R_{ers} voor het werkpunt gelden:

TABEL

Firma	Buis	R_{ers} k Ohm
Philips	EF9	3,0
,,	EF8	2,5
,,	EF50	1,4
,,	EFF50	0,60
,,	EF51	0,90
Telefunken	EF11	3,0
,,	EF14	0,90
,,	AF100	0,60
RCA	6SK7	11,4
,,	1852	1,0

Wanneer het schermrooster van een tetrode *zeer* groote mazen heeft, zal een deel der door de cathode geëmitteerde electronen door deze mazen direct naar de anode vliegen. Deze electronen nemen *niet* aan de stroomverdeeling tusschen schermrooster en anode deel. In dergelijke gevallen moet in de formules 19) en 20) onder I_k slechts een *deel* van de totale cathodestroom en evenzoo onder I_{g2} en I_a slechts een *deel* van deze stroomen worden verstaan. Het overige deel van I_k vliegt direct naar de anode (indien afkomstig van gedeelten van het cathodeoppervlak, welke recht tegenover de mazen van het rooster zijn gelegen) of direct naar het scherm (indien afkomstig van gedeelten van het cathode-oppervlak, welke tegenover gesloten deelen van het schermvlak liggen).

IIIb. *Fluctuaties in secundaire emissie buizen.*

In secundaire emissie buizen wordt een electronenstroom op een oppervlak gericht, dat bij electronenbeschieting secundaire electronen emitteert. Zulke oppervlakken leveren, indien gunstig gekozen, meerdere secundaire electronen voor elk primair tegen deze oppervlakken botsend electron. Door het gebruik van buizen met dergelijke electroden is het mogelijk, de anodestroom en de steilheid van de anodestroom ten opzichte van meerroosterbuizen zonder secundaire emissie aanzienlijk te verhoogen.

Ondertusschen vormt deze secundaire emissie een extra fluctuatiebron (*26*). Om dit in te zien, moeten wij het volgende overwegen: Wanneer een primair op het electrodenvlak botsend electron onder alle omstandigheden hieruit nauwkeurig p secundaire electronen zou vrijmaken, zou de op de anode der buis (met één secundaire emissie electrode) aankomende stroom gedurende alle tijdsvakken precies het p-voudige van de primair op de secundaire emissie electrode botsende stroom I_p bedragen. Deze primaire stroom bevat een effectieve fluctuatiecomponente $\mathfrak{I}_p$:

$$\mathfrak{I}_p^2 = 2e_1 I_p F_p^2 \Delta f .$$

F_p^2 kan hier uit de fluctuatiebronnen van de primaire stroom I_p berekend worden. Wanneer bijv. de primaire stroom slechts door een enkel positief rooster is gegaan, kan F_p^2 volgens verg. 23) gelijk F_a^2 genomen worden en I_p gelijk I_a van verg. 23). Wij noemen I_s de stroom, die in zijn geheel de secundaire emissie electrode verlaat en $\mathfrak{I}_s$ zijn effectieve fluctuatie. Volgens onze onderstelling is I_s dan gelijk aan pI_p en $\mathfrak{I}_s = p\mathfrak{I}_p$, dus:

$$\mathfrak{I}_s^2 = 2e_1 I_p p^2 F_p^2 \Delta f = 2e_1 I_s p F_p^2 \Delta f = 2e_1 I_s F_s^2 \Delta f, \text{ met } F_s^2 = pF_p^2.$$

Berekent men met behulp van deze gegevens de ruischvervangingsweerstand uit de overeenkomstig verg. 25) opgestelde formule:

$$R_{ers} = 2{,}0.10^4 \frac{I_s}{S_s^2} F_s^2 = 2{,}0.10^4 \cdot \frac{pI_p}{p^2 S_p^2} pF_p^2 = 2{,}0.10^4 \frac{I_p}{S_p^2} F_p^2,$$

dan blijkt, dat de vervangingsruischweerstand aan het stuurrooster door toevoeging van een secundaire emissie electrode, onder deze condities, niet zal veranderen.

Tot nu toe hebben wij aangenomen, dat elk botsend primair electron steeds *nauwkeurig* p secundaire electronen vrijmaakt. In werkelijkheid staat dit getal niet nauwkeurig vast, maar schommelt zelf ook, wanneer wij dit getal door metingen gedurende verscheidene even lange tijdsvakken bepalen. Hierin is dus nog een verdere bron voor stroomfluctuaties gelegen, welke in hooge mate van de bedrijfsvoorwaarden van de secundaire cathode afhangt. Wij moeten derhalve in plaats van de formule $F_s^2 = pF_p^2$ schrijven

$$\left.\begin{aligned} F_s^2 &= pF_p^2 + q \quad \text{en} \\ \mathfrak{I}_s^2 &= 2e_1 I_s F_s^2 \Delta f, \\ I_s &= pI_p . \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 26)$$

Voor moderne secundaire emissie buizen (bijv. Philips EE50) kan $p = \pm 5$ en $q = \pm 1{,}5$ genomen worden. De ruischvervangingsweerstand van een dergelijke buis met een secundaire emissie electrode is:

$$R_{ers}\,(Ohm) = 2{,}0.10^4 \frac{I_s(mA)}{S_s^2(mA/V)^2} F_s^2 \quad \ldots\ldots \quad 27)$$

waarin S_s (steilheid) een kleine verandering van de, de secundaire emissie electrode verlatende, stroom is, gedeeld door de bijbehoorende spanningsverandering van het stuurrooster. Tengevolge van de grootheid q, die direct met de fluctuatie van het aantal secundaire electronen voor één botsend primair electron verband houdt, is R_{ers} voor een buis met secundaire emissie *grooter* dan voor een andere buis met gelijke I_p, S_p en F_p. Voorbeeld met getallen: $I_p = 2\,mA$, $S_p = 2\,mA/V$, $F_p^2 = 0{,}40$, $p = 5$, $q = 1{,}5$; R_{ers} wordt dan $= 0{,}70.10^4$ *Ohm*. Voor de over-

eenkomstige buis zonder secundaire emissie zou $R_{ers} = 0{,}40.10^4$ *Ohm* bedragen. In dat geval treedt tengevolge van de secundaire emissie nagenoeg verdubbeling van de ruischvervangingsweerstand aan het rooster op.

Bovenstaande gegevens zijn ook voldoende om de stroomfluctuaties van buizen met verscheidene secundaire emissie trappen te kunnen berekenen. Men kan de gegeven formules en grootheden als experimenteel bevestigd beschouwen.

IIIc. *Vergelijking met fotocellen.*

Het mechanisme der secundaire emissie van electronen vertoont eenige karakteristieke verschillen vergeleken met de bedrijfsvoorwaarden van een fotocel, hoewel aan de andere kant de foto-electrode en de secundaire emissie electrode beide door botsingen van primaire energie secundaire electronen emitteeren. Wij willen thans uiteenzetten, hoe deze karakteristieke verschillen in beide gevallen tot kwantitatief verschillende fluctuaties leiden.

Bij de vergelijking is het gemakkelijk, de primaire botsende energie bij de fotocellen in de vorm van lichtquanta aan te geven. Het aantal der op de fotocathode aankomende lichtquanta is niet constant, doch vertoont een zekere fluctuatie. Het blijkt echter, dat een zeer groot aantal lichtquanta (bijv. 500) noodig is om een enkel electron uit de fotocathode vrij te maken. Derhalve komt de genoemde fluctuatie in het aantal botsende lichtquanta bijna in het geheel niet tot uiting in de fluctuatie van het aantal geëmitteerde fotoelectronen.

Men kan deze condities met die bij een secundaire emissie electrode vergelijken, wanneer voor verscheidene botsende primaire electronen slechts een enkel secundair electron geëmitteerd zou worden. Het getal p van verg. 26) zou dan zeer klein zijn en F_s^2 zou F_p^2 slechts in zeer veel mindere mate bevatten.

Men kan de werking van de fotocathode door genoemde omstandigheid ook met goede benadering zoo uitleggen, dat een als functie van de tijd fluctuatielooze primaire energiebron electronen uit de cathode vrijmaakt. Men heeft dan hetzelfde proces als in het geval, dat het primair vermogen aan de cathode door verwarming wordt toegevoerd. Daar de geëmitteerde stroom steeds zeer gering is, moet men een fotocel als diode in het verzadigingsstroomgebied beschouwen en dus de fluctuatie van de anodestroom uit verg. 14) met $F^2 = 1$, dwz. uit verg. 13) berekenen.

Beschouwen wij thans weer de secundaire emissie electrode, dan dragen laatstgenoemde overwegingen bij tot het juiste begrip van de grootheid q in verg. 26). Wanneer de primaire electronen slechts weinig secundaire electronen zouden doen ontstaan ($p \ll 1$) en de primaire stroom dus als naar de tijd nagenoeg constante energiebron tot het opwekken van secundaire emissie beschouwd zou kunnen worden, dan zou men kunnen veronderstellen, dat de fluctuaties van de geëmitteerde secundaire stroom equivalent zijn aan die van de emissiestroom van een diode. Deze onderstelling leidt tot $q = 1$ in verg. 26). In werkelijkheid hangt q van de bedrijfsvoorwaarden, zooals stroomsterkte en spanning der secundaire emissie electrode, af doch verschilt practisch meestal slechts weinig van 1 (vergelijk bovenstaand voorbeeld met $q = 1{,}5$). Wanneer de secundaire emissie electrode telkens nauwkeurig n secundaire electronen *gelijktijdig* zou emitteeren, zou met een lading ne_1 in plaats van e_1 in verg. 13) rekening gehouden moeten worden en zou q in bovenstaande formule $= n$ zijn. Het getal q hangt dus van het gemiddeld aantal *gelijktijdig* geëmitteerde secundaire electronen af.

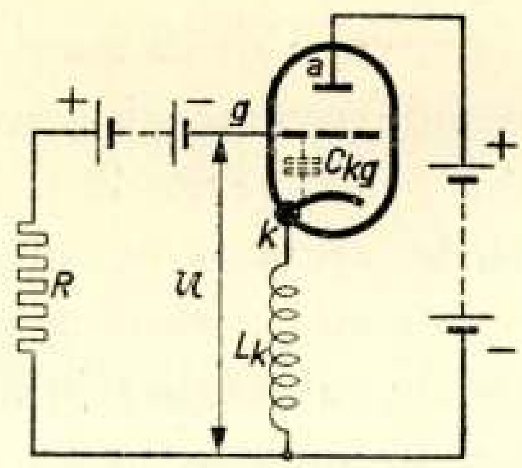
IV. *Schakelingen ter vermindering van stroomfluctuaties in de anodeketen van electronenbuizen.*

Door doelmatige schakelingen gelukt het, de fluctuatiestroomen en -spanningen in de anodeketen van een electronenbuis te verminderen (*14*, *23*). Wij zullen thans enkele voorbeelden van dergelijke schakelingen behandelen.

IVa. *Vermindering van anodestroomfluctuaties tengevolge van cathodestroomfluctuaties.*

Wij beschouwen de in fig. 9 weergegeven schakeling. De met R aangeduide Ohmsche weerstand stelt de afstemweerstand van een trillingskring voor, welke door parallelschakeling van een Ohmsche weerstand R, een zelfinductie L en een capaciteit C gevormd wordt. Wij bestudeeren nu de werking van de schakeling bij een hoekfrequentie ω. Voor deze hoekfrequentie is de genoemde trillingskring zoodanig afgestemd, dat: $\omega^2 L(C + C_{kg}) = 1$.

De cathodestroomfluctuatie $\mathfrak{J}_k$ loopt door de zelfinductie L_k en wekt tusschen haar klemmen een fluctuatiespanning $j\omega L_k \mathfrak{J}_k$ op, waarbij $j = +\sqrt{-1}$. Tusschen de klemmen van R zij een fluctuatiespanning $\mathfrak{U}$ aanwezig, verband houdende met de fluc-



Figuur 9.

Schema van een triode met een zelfinductie L_k in de cathodetoevoerleiding en een afgestemde trillingskring (afstemweerstand R) tusschen rooster en cathode. Aan de klemmen van R onstaat de spanningsfluctuatie $\mathfrak{U}$

tuatiestroom $\mathfrak{J}_k$. Wanneer wij aannemen, dat $\omega L_k \mathfrak{J}_k << \mathfrak{U}$ is, ontstaat tengevolge van de steilheid S van de buis door de fluctuatiespanning $\mathfrak{U}$ een anodefluctuatiestroom: $S\mathfrak{U}$ en zoodoende een totale fluctuatiespanning tusschen de klemmen van L ter grootte van $(\mathfrak{J}_k + S\mathfrak{U})\, j\omega L_k$. Door deze spanning wordt tusschen de klemmen van R bij benadering een fluctuatiespanning $(\mathfrak{J}_k + S\mathfrak{U})$ $j\omega L_k j\omega C_{kg} R$ opgewekt en deze spanning wordt verondersteld, gelijk $\mathfrak{U}$ te zijn. Dus geldt:

$$\mathfrak{U} = -\,\mathfrak{J}_k \omega^2 L_k C_{kg} \left(\frac{1}{R} + \omega^2 S L_k C_{kg}\right)^{-1}$$

Hieruit wordt de fluctuatiestroom $\mathfrak{J}_a$ in de anodeketen afgeleid:

$$\mathfrak{J}_a = \mathfrak{J}_k + S\mathfrak{U} = \mathfrak{J}_k \left\{ 1 - S\omega^2 L_k C_{kg} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_L}\right)^{-1} \right\},$$

$$\text{met } \frac{1}{R_L} = \omega^2 L_k C_{kg} S\,.$$

Stellen wij verder:

$$\frac{1}{R_L} + \frac{1}{R} = \frac{1}{R_i}\,,$$

dan ontstaat de eenvoudige formule:

$$\mathfrak{J}_a = \mathfrak{J}_k \left(1 - \frac{R_i}{R_L}\right) = \mathfrak{J}_k \frac{R_i}{R} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 28)$$

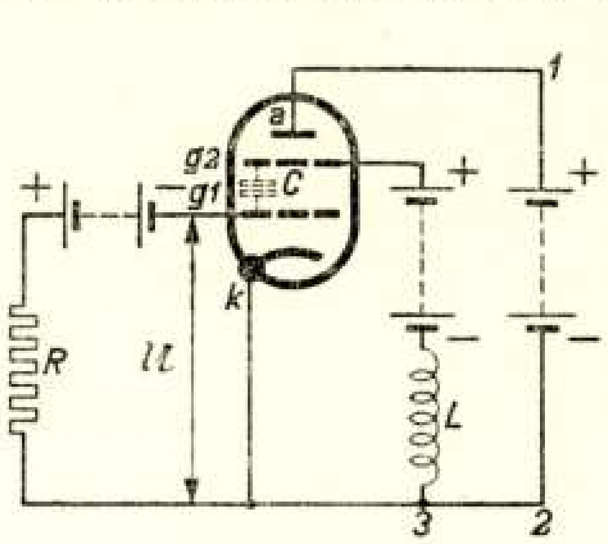
Daar volgens definitie R_i steeds kleiner is dan R, zal $\mathfrak{J}_a$ steeds kleiner zijn dan $\mathfrak{J}_k$, dwz. er vindt een verlaging van de oorspron-

kelijk $\mathfrak{I}_k$ bedragende fluctuatiestroom in de anodeketen plaats.

Zooals boven reeds werd opgemerkt, geeft deze berekening slechts een benadering, welke echter de werkelijke verhoudingen bijna geheel nauwkeurig weergeeft, wanneer aan de ongelijkheden: $\omega^2 S^2 L_k^2 \ll 1$ en $\omega^2 L_k C_{kg} \ll 1$ voldaan is. Verder zijn ook de van de Ohmsche weerstand R afkomstige spanningsfluctuaties buiten beschouwing gelaten.

IVb. *Vermindering der anodestroomfluctuaties tengevolge van stroomverdeelingsfluctuaties.*

Hiertoe bechouwen wij de in fig. 10 weergegeven schakeling. Tusschen stuurrooster en cathode is een Ohmsche weerstand



Figuur 10.

Schema van een schermroosterbuis met een zelfinductie L in de schermroostertoevoerleiding en een afgestemde trillingskring tusschen stuurrooster en cathode (afstemweerstand R). Aan de klemmen van R ontstaat een spanningsfluctuatie $\mathfrak{U}$.

R geteekend. Deze weerstand stelt, evenals in hoofdstuk IVa, de afstemweerstand van een trillingskring voor, welke door parallelschakeling van een zelfinductie L_1, een capaciteit C_1 en een Ohmsche weerstand R gevormd wordt. De afstemming wordt zoo gekozen, dat voor de beschouwde hoekfrequentie ω geldt: $\omega^2 L_1 (C_1 + C) = 1$, waarbij C de capaciteit tusschen schermrooster ($g2$) en stuurrooster ($g1$) is. Tusschen de klemmen van R en derhalve tusschen stuurrooster en cathode zal tengevolge van de genomen schakelmaatregelen (de genoemde trillingskring en de zelfinductie L in de schermroosterleiding) een fluctuatiespanning $\mathfrak{U}$ ontstaan.

In de schermroosterleiding vloeit volgens hoofdstuk IIIa een verdeelingsstroomfluctuatie $\mathfrak{I}_{g2}$ (zie verg. 19) wanneer $R = 0$ en $L = 0$ is. Verder vloeit dan volgens verg. 23) in de anodeleiding een fluctuatiestroom $\mathfrak{I}_a$. Wij willen door de genoemde schakel-

maatregelen bereiken, dat de fluctuatiestroom $\mathfrak{J}_a'$, die onder invloed van deze maatregelen tenslotte in de anodeleiding vloeit, kleiner is dan de oorspronkelijke fluctuatiestroom $\mathfrak{J}_a$.

Bij de berekening van deze schakeling gaan we ervan uit, dat de schermroosterstroom een steilheid S_2 met betrekking tot de stuurroosterspanning vertoont en de anodestroom een steilheid S_a. De tusschen de klemmen van L opgewekte spanningsfluctuatie bedraagt, met inachtname der spanningsfluctuatie $\mathfrak{U}$ tusschen stuurrooster en cathode: $(\mathfrak{J}_{g2}+S_2\mathfrak{U})j\omega L$. Deze spanningsfluctuatie veroorzaakt tusschen stuurrooster en cathode, tengevolge van de capaciteit C, bij benadering een spanningsfluctuatie: $(\mathfrak{J}_{g2} + S_2\mathfrak{U})\omega^2 LCR$ en deze spanningsfluctuatie wordt verondersteld gelijk te zijn aan $\mathfrak{U}$. Men vindt dus:

$$\mathfrak{U} = (\mathfrak{J}_{g2} + S_2\mathfrak{U})\,\omega^2 LCR \text{ of } \mathfrak{U} = \mathfrak{J}_{g2}\omega^2 LCR(1 - S_2\omega^2 LCR)^{-1}\ .$$

Met de afkortingen:

$$\frac{1}{R_2} = S_2\omega^2 LC \text{ en } \frac{1}{R_i} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_2}$$

verkrijgt men:

$$\mathfrak{U} = \frac{\mathfrak{J}_{g2}}{S_2}\,\frac{R_i}{R_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 29)$$

De fluctuatiestroom $\mathfrak{J}_{g2}$ naar het schermrooster tengevolge van de stroomverdeeling hangt volgens verg. 29) nauw samen met de fluctuatiespanning $\mathfrak{U}$ tusschen stuurrooster en cathode. Deze fluctuatiespanning $\mathfrak{U}$ wekt tengevolge van de steilheid S_a een fluctuatiestroom $S_a\mathfrak{U}$ in de anodeleiding op. Deze fluctuatiestroom verschilt 180° in fase ten opzichte van het oorspronkelijk ($R = 0$, $L = 0$) in de anodeleiding vloeiende fluctuatiestroomaandeel $\mathfrak{J}_{av}$ (ten bedrage van $\mathfrak{J}_{g2}$) ingevolge de stroomverdeeling volgens verg. 20) en heeft het bedrag $S_a\mathfrak{J}_{g2}R_i/S_2R_2$. Wanneer wij dus

$$\frac{S_a}{S_2}\,\frac{R_i}{R_2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 30)$$

kiezen, kunnen wij de stroomverdeelingsfluctuaties in de anodeleiding geheel uitschakelen. Bij deze compenseering der stroomverdeelingsfluctuaties in de anodeleiding wordt de oorspronkelijke fluctuatiestroom $\mathfrak{J}_{ak}$ in deze leiding (vergelijk hoofdstuk IIIa) iets grooter en wel vermenigvuldigd met een factor $(I_{g2} + I_a)/I_a$. Daar echter de schermroostergelijkstroom I_{g2} meestal slechts

een fractie van de anodegelijkstroom is, is deze factor meestal slechts weinig grooter dan 1.

Boven werd reeds opgemerkt, dat onze berekening slechts bij benadering juist is. Een nauwkeurige berekening toont aan, dat de fout daarin gelegen is, dat in onze formule 29) 1 in plaats van $1 - \omega^2 LC$ is ingevoerd. Zoolang dus $\omega^2 LC \ll 1$ is, blijft deze fout gering. Ook de van de Ohmsche weerstand R afkomstige spanningsfluctuaties werden buiten beschouwing gelaten.

IVc. *Algemeene regels ter vermindering der stroomfluctuaties in de anodeketen.*

De methoden ter vermindering van de anodestroomfluctuaties, waarvoor boven twee voorbeelden gegeven werden, (hoofdstuk IVa en IVb) hebben alle een gemeenschappelijke basis. Zij berusten nl. op een soort terugkoppeling.

Wanneer een deel van de fluctuatiestroom in de anodeleiding verminderd of gecompenseerd moet worden, wordt aan het stuurrooster een met dit stroomdeel direct gecorreleerde fluctuatiespanning toegevoerd. De fase van deze spanning met betrekking tot het genoemde aandeel aan de anodestroom moet zoodanig worden gekozen, dat de gewenschte vermindering of compenseering kan optreden.

De genoemde fluctuatiespanning kan tusschen stuurrooster en cathode op verschillende wijze opgewekt worden. Men kan bijv. de leiding van een hulpelectrode (zooals in hoofdstuk IVb het schermrooster) gebruiken en door inschakelen van een geschikte complexe weerstand in deze leiding een spanningsfluctuatie tusschen hulpelectrode en cathode opwekken, waardoor een spanningsfluctuatie tusschen stuurrooster en cathode ontstaat. Ook kan men een wederzijdsche inductie tusschen de betreffende electrodeleiding en de stuurrooster-cathodekring toepassen. Deze methoden zijn ook voor buizen met meerdere roosters (bijv. mengbuizen) en voor secundaire emissie buizen met succes toegepast.

Ten aanzien van de vermindering der anodestroomfluctuaties kunnen verschillende doeleinden worden nagestreefd. Men kan probeeren, de anodestroomfluctuaties zelf zoo klein mogelijk te maken; men kan er echter ook van uitgaan, dat een zoo gunstig mogelijke verhouding tusschen de verlangde wisselspanningen en de spanningsfluctuaties aan de uitgang der versterkertrap verkregen moet worden. Verder moeten ook nog eventueele andere voor- en nadeelen der toegepaste schakelmaatregelen in aanmerking genomen worden.

V. *Enkele regels betreffende de invloed van spanningsfluctuaties in versterkertrappen.*

In aansluiting op de laatste regels van hoofdstuk IV zullen wij hier eenige gezichtspunten uiteenzetten, welke bij de beoordeeling van fluctuaties in versterkertrappen van belang blijken te zijn (27).

Va. *Voorwaarden voor de fluctuaties bij een voorversterkertrap.*

Uit de uiteenzettingen in hoofdstuk II en III blijkt, dat de stroom- en spanningsfluctuaties, welke aan de uitgang van een versterkertrap als gevolg van het in bedrijf stellen van de electronenbuis optreden, door een op eenvoudige wijze te berekenen spanningsfluctuatie aan de ingang van de buis vervangen kunnen worden, terwijl dan verder aangenomen kan worden, dat door de buis zonder eenige fluctuatieverschijnselen versterkt wordt. Deze effectieve spanningsfluctuaties aan de ingang der buis kunnen wij ons als door een Ohmsche weerstand op kamertemperatuur ontstaan denken, welke weerstand aan het rooster geschakeld is en die wij vervangingsruischweerstand R_{ers} genoemd hebben.

Aan de ingang van een voorversterkertrap vindt men vaak nog verschillende andere bronnen voor spanningsfluctuaties, die deels door de tweepolen der ingangsschakeling teweeggebracht worden, deels door onderdeelen van het betreffende apparaat, zooals bijv. microfoons, fotocellen of antennes, veroorzaakt worden. Men kan al deze fluctuatiebronnen eveneens door een equivalente Ohmsche weerstand R_{eq} aan het rooster van de buis vervangen. Voor tweepoolschakelingen hebben wij deze berekening (hoofdstuk I) reeds uitgevoerd.

De eerste eisch, die wij stellen moeten, is nu, dat de geheele schakeling aan de buisingang zoo ingesteld is dat de weerstand R_{eq} zoo klein mogelijk wordt, terwijl aan de andere kant de gewenschte ingangswisselspanning van de buis zoo groot mogelijk moet zijn. Verder moet onder deze voorwaarden R_{ers} in vergelijking met R_{eq} zoo klein mogelijk zijn. Anders gezegd: het ingangsruischniveau van de buis moet klein zijn ten opzichte van dat der schakeling. Natuurlijk zal ook de gewenschte ingangswisselspanning, vergeleken met de effectieve spanningsfluctuatie, welke met het ingangsruischniveau overeenkomt, groot moeten zijn, teneinde een doelmatige toepassing der buis mogelijk te maken.

Op de beschouwde eerste voortrap volgt meestal nog een verdere versterkertrap. Deze tweede trap kan weer door een ingangsruischweerstand R'_{ers} aan het rooster van de betreffende electronenbuis gekenmerkt worden. Eenvoudigheidshalve denken we dit rooster direct met de uitgang der eerste trap verbonden. De spanningsversterking der eerste trap zal b.v. de absolute waarde v hebben. Hierdoor vindt men, daar R'_{ers} evenredig is met het *kwadraat* der bijbehoorende effectieve spanningsfluctuatie (hoofdstuk I), dat deze ruischweerstand van de tweede trap aan het rooster van de eerste buis equivalent is met de ruischweerstand R'_{ers}/v^2. Dientengevolge wordt de totale ruischweerstand aan het rooster van de eerste buis:

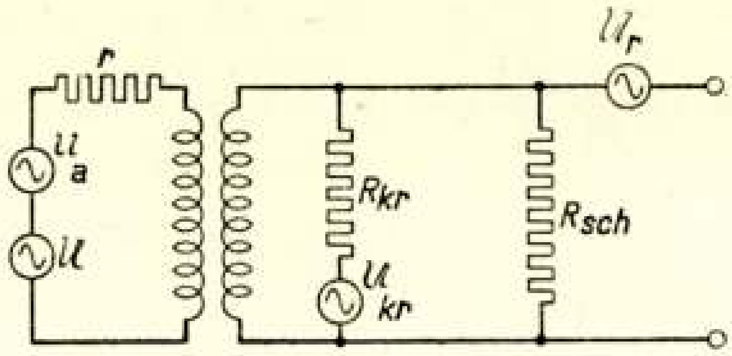
$$R_g = R_{eq} + R_{ers} + \frac{R'_{ers}}{v^2} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad 31)$$

De versterking v^2 moet nu zoo groot zijn, dat $R_{ers} + R'_{ers}/v^2$ samengenomen, klein blijft ten opzichte van R_{eq}. Aan deze voorwaarde wordt bijv. voldaan, wanneer R_{ers} klein is t.o.v. R_{eq} en R'_{ers}/v^2 kleiner dan R_{ers}.

Een bijzonder eenvoudig geval doet zich voor, wanneer twee gelijke versterkertrappen achter elkaar geschakeld zijn, dus $R'_{ers} = R_{ers}$. Wanneer dan v bijv. gelijk aan 3 is, zou aan onze laatste eisch voldaan zijn. Hierdoor wordt aan de gewenschte versterking per trap een onderste grens gesteld.

Vb. *Berekening van de verhouding tusschen de gewenschte wisselspanning en de fluctuatiespanning aan de ingang van een versterkertrap.*

Wij voeren de bovengenoemde berekening uit voor een voorbeeld, dat zoo algemeen gehouden is, dat het verloop van de berekening ook voor analoge gevallen geldt. De beschouwde schakeling is weergegeven in fig. 11. Een spanningsbron (bijv. een antenne of een gestuurde fotocel) wekt een wisselspanning $\mathfrak{U}$ op, die wij signaalspanning noemen, en een effectieve fluctuatiespanning $\mathfrak{U}_a$. De spanningsbron heeft een inwendige Ohmsche weerstand r en is via een transformator (transformatieverhouding van w_1 op w_2 waarbij w_1 aan de zijde van de spanningsbron ligt) met de buisingang verbonden. Aan de buisingang is nog een afgestemde trillingskring geschakeld, welke wij door een Ohmsche weerstand R_{kr} in serie met een fluctuatiespanningsbron $\mathfrak{U}_{kr}$ voorstellen. Verder bevindt zich parallel aan R_{kr} een



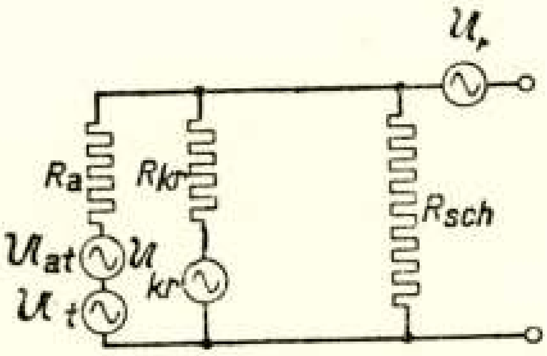
Figuur 11.

Schema van een signaalbron (signaalspanning $\mathfrak{U}$ in serie met met de inwendige weerstand r), welke een spanningsfluctuatie $\mathfrak{U}_a$ opwekt en over een ideale transformator (transformatieverhouding w_1/w_2 van links naar rechts) met de buisingang verbonden is. Parallel aan de buisingang ligt nog een afgestemde trillingskring (afstemweerstand R_{kr} in serie met de spanningsfluctuatie $\mathfrak{U}_{kr}$) en een Ohmsche weerstand R_{sch} tengevolge van de eventueel ter vermindering der stroomfluctuaties in de anodeketen van de buis getroffen schakelmaatregelen.

Ohmsche weerstand R_{sch}, welke door de schakelmaatregelen ter vermindering der stroomfluctuaties in de anodeketen der buis ontstaat. Tenslotte is $\mathfrak{U}_r$ de ingangsruischspanning van de buis, welke met de genoemde anodestroomfluctuaties overeenkomt. De werking van de in fig. 11 geteekende transformator wordt door fig. 12 getoond. Hier zijn de volgende „getransformeerde" grootheden ingevoerd:

$$\mathfrak{U}_t = (w_2/w_1)\mathfrak{U}, \quad \mathfrak{U}_{at} = (w_2/w_1)\mathfrak{U}_a, \quad R_a = (w_2/w_1)^2 r.$$

Wij berekenen nu aan de hand van deze fig. 12 zoowel de resulteerende signaalspanning $\mathfrak{U}_s$ aan de buisingang, als de resulteerende effectieve spanningsfluctuatie $\mathfrak{U}_e$ en verkrijgen zoo



Figuur 12.

Omrekening van het schema van fig. 11 door invoering van de transformatieverhouding van de ideale transformator van fig. 11. Hierbij is (vergelijk fig. 11)

$$\mathfrak{U}_t = \mathfrak{U} w_2/w_1\,; \quad \mathfrak{U}_{at} = \mathfrak{U}_a w_2/w_1\,; \quad R_a = r(w_2/w_1)^2.$$

de verhouding tusschen deze beide spanningen. Voor deze berekening is de volgende afkorting van nut:

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_{kr}} + \frac{1}{R_{sch}} \quad .$$

Onder R_i wordt dan de totale Ohmsche weerstand der schakeldeelen, gerekend aan de buisingang, verstaan. Men verkrijgt aldus de signaalspanning aan de buisingang:

$$\mathfrak{U}_s = \mathfrak{U}_t \frac{R_i}{R_a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 32)$$

en de resulteerende effectieve spanningsfluctuatie $\mathfrak{U}_e$ volgens de formule:

$$\mathfrak{U}_e^2 = \mathfrak{U}_r^2 + \left(\mathfrak{U}_{at} \frac{R_i}{R_a}\right)^2 + \left(\mathfrak{U}_{kr} \frac{R_i}{R_{kr}}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 33)$$

Deze formules 32) en 33) kunnen algemeen op analoge gevallen toegepast worden.

Als speciaal voorbeeld beschouwen wij de in hoofdstuk IVa behandelde schakelmaatregel ter vermindering van de anodefluctuatiestroom. In dit voorbeeld is: $1/R_{sch} = 1/R_L = \omega^2 L_k C_{kg} S$ (vergelijk fig. 9). Door het aanbrengen van de zelfinductie L in de cathodeleiding is de ingangsspanningsfluctuatie $\mathfrak{U}_r$ van de buis ten opzichte van de oorspronkelijke waarde $\mathfrak{U}_u$ (met $L = O$) volgens verg. 28) in de verhouding $\mathfrak{U}_r/\mathfrak{U}_u = R_i/R$ verminderd. Onder R moet volgens het bovenstaande en volgens hoofdstuk IVa de parallelschakeling van R_a en R_{kr} worden verstaan:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_{kr}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 34)$$

Voert men deze waarde $\mathfrak{U}_r = \mathfrak{U}_u R_i/R$ in verg. 33) in, dan verkrijgt men voor de effectieve resulteerende spanningsfluctuatie aan de buisingang:

$$\mathfrak{U}_e = R_i \left\{ \left(\frac{\mathfrak{U}_u}{R}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{U}_{at}}{R_a}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{U}_{kr}}{R_{kr}}\right)^2 \right\}^{1/2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 35)$$

In de verhouding tusschen $\mathfrak{U}_e$ volgens verg. 35) en $\mathfrak{U}_s$ volgens verg. 32) valt R_i dus weg. Daar R_i de eenige grootheid van deze vergelijkingen is, welke de waarde $R_{sch} = R_L$ bevat, moet

de gevolgtrekking gemaakt worden: *Door het aanbrengen van een zelfinductie in de cathodeleiding wordt de verhouding tusschen de effectieve fluctuatiespanning en de signaalspanning aan de buisingang van een versterkertrap niet veranderd.*

Hieruit mag echter geenszins de gevolgtrekking gemaakt worden, dat het aanbrengen van de genoemde zelfinductie doelloos zou zijn. Want wij hebben door deze schakelmaatregel een versterkertrap verkregen, die een lagere Ohmsche ingangsweerstand heeft (nl. R_i) dan wanneer deze maatregel niet getroffen zou zijn (nl. R). De verkregen versterkertrap vertoont echter dezelfde verhouding tusschen signaalspanning en fluctuatiespanning aan de buisingang, als oorspronkelijk het geval was. Wanneer voor bepaalde doeleinden (bijv. breedeband-versterking) de ingangsweerstand van de trap is vastgelegd, verschaft deze maatregel ons dus een middel om deze ingangsweerstand te bereiken, zonder dat extra dempingen, zooals bijv. Ohmsche parallelweerstanden, ingevoerd behoeven te worden. Wij bereiken dus door deze schakelmaatregel een gunstiger verhouding tusschen signaal- en fluctuatiespanning aan de buisingang dan anders bij gelijke ingangsweerstand verkregen zou zijn.

Men heeft wel eens eerder naar voren gebracht, dat door een zgn. tegenkoppeling (analoog aan de zelfinductie in de cathodeleiding) de verhouding van fluctuatiestroom tot signaalstroom aan de uitgang van een buis verkleind wordt (b.v. *24*). Deze conclusie geldt evenwel slechts voor het geval, dat we de signaalstroom *aan de uitgang* vóór en na de tegenkoppeling constant houden. Daar de versterking zakt, moeten we in dit geval aan de ingang meer signaalspanning toevoeren.

We hebben boven evenwel de signaalspanning aan de ingang (antennespanning $\mathfrak{U}$) constant gehouden. Daarvandaan het verschil tusschen beide genoemde resultaten.

Samenvatting.

In dit artikel worden de fluctuatiespanningen en fluctuatiestroomen in versterkertrappen behandeld. Het artikel beoogt in de eerste plaats, eenvoudige schema's en rekenmethoden af te leiden, waardoor de fluctuatieverschijnselen kwantitatief verklaard kunnen worden. Verder worden methoden besproken, volgens welke deze fluctuaties in enkele gevallen verminderd of zelfs gecompenseerd kunnen worden.

Hoofdstuk I geeft de formules en vervangingsschema's voor

de door Ohmsche weerstanden opgewekte fluctuatiespanningen en -stroomen, alsmede een uiteenzetting van het begrip „equivalente ruischweerstand" en de formules en schema's voor de fluctuaties in passieve tweepoolschakelingen, welke Ohmsche weerstanden bevatten. In hoofdstuk II worden allereerst de stroomfluctuaties van een diode op grond van de met de inwendige weerstand overeenkomende spanningsfluctuaties afgeleid. De formules worden op trioden toegepast en de „vervangingsruischweerstand" van een dergelijke buis afgeleid. Ook het vonkeleffect wordt terloops besproken. In hoofdstuk III worden de stroomfluctuaties in meerroosterbuizen en secundaire emissie buizen op elementaire wijze afgeleid en aan de hand van practische voorbeelden behandeld. In hoofdstuk IV worden methoden ter vermindering van stroomfluctuaties gegeven en tevens twee voorbeelden en algemeene regels voor dergelijke methoden. In hoofdstuk V worden de gevolgen van de genoemde fluctuaties in versterkertrappen behandeld.

LITERATUUR

1) C. J. Bakker, Current distribution fluctuations in multelectrode radio valves. Physica, Bd. 5 (1938), p. 581—591.

2) C. J. Bakker en G. Heller, On the Brownian motion in electric resistances. Physica, Bd. 6 (1939), p. 262—274.

3) C. J. Bakker, Fluctuations and electron inertia. Physica Bd. 8 (1941), p. 23—43.

4) G. L. de Haas-Lorentz, Die Brownsche Bewegung und einige verwandte Erscheinungen. Vieweg Braunschweig 1913, 103 p. (Uebersetzung der entsprechenden Leidener Dissertation von 1912).

5) H. von Helmholtz, Ueber einige Gesetze der Vertheilung elektrischer Ströme in körperlichen Leitern mit Anwendung auf die thierisch elektrischen Versuche. Poggend. Ann., Bd. 89 (1853), p. 211—233 en p. 353—377.

6) H. Jacobi en L. Kirchgessner, Die Raumladungsschwächung des Schroteffektes. Wiss. Veröff. Siemens-Werke, Bd. 16 (1937), H2, p. 42—57.

7) K. G. Jansky, Directional studies of atmospherics at high frequencies. Proc. Inst. Radio Engs., Bd. 20 (1932) p. 1920—1932.

K. G. Jansky, A note on the source of interstellar interference. Proc. Inst. Radio Engs., Bd. 23 (1935), p. 1158—1163.

K. G. Jansky, Minimum noise levels obtained on short wave radio receiving systems. Proc. Inst. Radio Engs., Bd. 25 (1937) p. 1517—1530.

8) K. G. Jansky, Characteristics of certain types of noise. Proc. Inst. Radio Engs., Bd. 27 (1939). p. 763—768.

9) J. B. Johnson, The Schottky effect in low frequency circuits. Phys. Rev., Bd. 26 (1925), p. 71—85.

10) J. B. Johnson, Thermal agitation of electricity in conductors. Phys. Rev., Bd. 32 (1928), p. 97—109.

11) E. B. Moullin, Spontaneous fluctuations of voltage. Clarendon, Press, Oxford, 1938, 251 p.

12) H. Nyquist, Thermal agitation of electric charge in conductors. Phys. Rev., Bd. 32 (1928), p. 110—113.

13) G. L. Pearson, Fluctuation noise in vacuum tubes. Physics. Bd. 5 (1934), p. 233—243.
G. L. Pearson, Quiet amplifier tubes. Bell. lab. rec., Bd. 14 (1935), p. 56—59.

14) W. S. Percival, An electrically cold resistance. Wireless Engineer, Bd. 16 (1939), p. 237—240.

15) W. Schottky, Ueber spontane Stromschwankungen in verschiedenen Elektrizitätsleitern. Ann. d. Phys., Bd. 57 (1918), p. 541—567.

16) W. Schottky, Zur Berechnung und Beurteilung des Schroteffektes. Ann. d. Phys., Bd. 68 (1922), p. 157—176.

17) W. Schottky, Small shot effect and flicker effect. Phys. Rev., Bd. 28 (1926), p. 75—103.

18) W. Schottky, Die Raumladungsschwächnung des Schroteffektes. Wiss. Veröff. Siemens-Werke, Bd. 16 (1937), H. 2, p. 1—18.

19) W. Schottky, Zur Theorie des Electronenrauschens in Mehrgitterröhren. Ann. d. Phys., Bd. 32 (1938), p. 195—204.

20) J. van Slingelandt, Fluctuaties bij electrische en optische verschijnselen. Diss. Leiden 1919, 75 p.

21) F. Spenke, Die Raumladungsschwächung des Schroteffektes. Wiss. Veröff. Siemens-Werke, Bd. 16 (1937), H. 2, p. 19—41.

22) M. J. O. Strutt, Moderne Mehrgitter-Elektronenröhren. 2. Auflage, Springer 1940, 283 p.

23) M. J. O. Strutt en A. van der Ziel, Methoden zur Kompensierung der Wirkungen verschiedener Arten von Schroteffekt in Electronenröhren und angeschlossenen Stromkreisen. Physica, Bd. 8 (1941), p. 1—22.

23a) M. J. O. Strutt en A. van der Ziel, Welche Grössen kennzeichnen die Verwendbarkeit einer Elektronenröhre zur Verstärkung kleinster Signale? Physica, Bd. 8 (1941). p. 424—425.

23b) M. J. O. Strutt en A. van der Ziel, Verringerung und Beseitigung der Spontanen Schwankungen bei der Verstärkung kleinster Photoströme. Physica Bd. 8 (1941), Nr. 5.

24) B. D. H. Tellegen, Tegenkoppeling. Philips Techn. Tijdschr., Bd. 2 (1937), p. 289—294.

25) F. C. Williams, Thermal fluctuations in complex networks Journn. Inst. El. Eng., London, Bd. 81 (1937), p. 751—760.
26) M. Ziegler, Shot effect of secondary emission I & II. Physica, Bd. 3 (1936), p. 1—11 en p. 307—316.
27) M. Ziegler, Het ruischen van ontvangapparaten. Philips Techn. Tijdschr., Bd. 3 (1938), p. 193—201.

MEETKUNDIGE CONFIGURATIES EN DUALITEIT VAN ELECTRISCHE NETWERKEN

door

B. D. H. TELLEGEN

Natuurkundig Laboratorium der N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken Eindhoven — Holland.

Voordracht gehouden voor het Nederlandsch Radio Genootschap op 22 November 1940.[1])

Bij berekeningen van electrische netwerken worden vaak analoge formules verkregen, wanneer men bepaalde grootheden van het ééne netwerk vergelijkt met geschikt gekozen overeenkomstige grootheden van het andere netwerk. Worden bijv. twee weerstanden R_1 en R_2 in serie geschakeld, dan bedraagt de totale weerstand $R_1 + R_2$. Worden deze weerstanden parallel geschakeld, dan bedraagt de totale weerstand $R_1R_2/R_1 + R_2$. Berekenen wij in het laatste geval echter niet de weerstand maar het omgekeerde van de weerstand, het geleidingsvermogen, van de parallelschakeling, dan vinden wij $R_1 + R_2/R_1R_2 = 1/R_1 + 1/R_2 = G_1 + G_2$, als G_1 en G_2 de geleidingsvermogens van de oorspronkelijke weerstanden voorstellen. Wij zien hieruit, dat, als wij bij parallelschakeling met geleidingsvermogens rekenen, wij een overeenkomstige uitdrukking voor het totale geleidingsvermogen krijgen als bij het rekenen met weerstanden bij serieschakeling voor de totale weerstand.

Een tweede voorbeeld krijgen wij door de serieschakeling van een weerstand R en een zelfinductie L te vergelijken met de parallelschakeling van een geleidingsvermogen G en een condensator C. Voor het eerste systeem bedraagt de impedantie $R + j\omega L$, voor het tweede systeem de admittantie $G + j\omega C$, dus ook weer overeenkomstige uitdrukkingen.

---

[1]) Reeds gedeeltelijk verschenen in het Philips Technisch Tijdschrift van November 1940.

Op deze wijze aan elkaar toegevoegde netwerken noemt men *duaal* ten opzichte van elkaar [1]). Deze dualiteit werd reeds opgemerkt door Sire de Vilar in 1901 (11)[2]) en door Russell in 1904 (10) aan vele voorbeelden toegelicht. Heeft men een bepaald netwerk bestudeerd en de eigenschappen ervan opgespoord, en kan men een duaal netwerk aangeven, dan zijn door de dualiteit de eigenschappen van dit laatste netwerk tevens bekend.

Het doel van dit artikel is nu te onderzoeken, hoe wij de in de genoemde voorbeelden gevonden dualiteit kunnen veralgemeenen om ook bij netwerken van ingewikkelder samenstelling een duaal systeem te kunnen aangeven.

Meetkundige configuraties der netwerken

Voor dit onderzoek is het noodig de netwerken uit meetkundig oogpunt te beschouwen. Daartoe voeren wij de volgende begrippen in: een willekeurig electrisch element (weerstand, spoel, condensator, spanningsbron, stroombron, enz.) van het netwerk noemen wij een *tak*; een eindpunt van een tak, dat dus doorgaans het verbindingspunt van twee of meer takken vormt, noemen wij een *knooppunt*; een enkele, gesloten, zichzelf niet snijdende stroombaan, die door willekeurig gekozen takken in het netwerk wordt gevormd, noemen wij een *maas*. Bij de meetkundige beschouwing der netwerken letten wij nu niet op de electrische beteekenis der in het netwerk voorkomende takken, maar op de meetkundige configuratie, waarbij alleen de wijze, waarop de takken met elkaar verbonden zijn, een rol speelt, niet de ligging der knooppunten en de lengte en vorm der takken. Het deel der meetkunde, dat figuren op deze wijze beschouwt, is de *analysis situs* of *topologie*, en daarin zijn de hier bedoelde configuraties onder de naam *graphen* bekend.

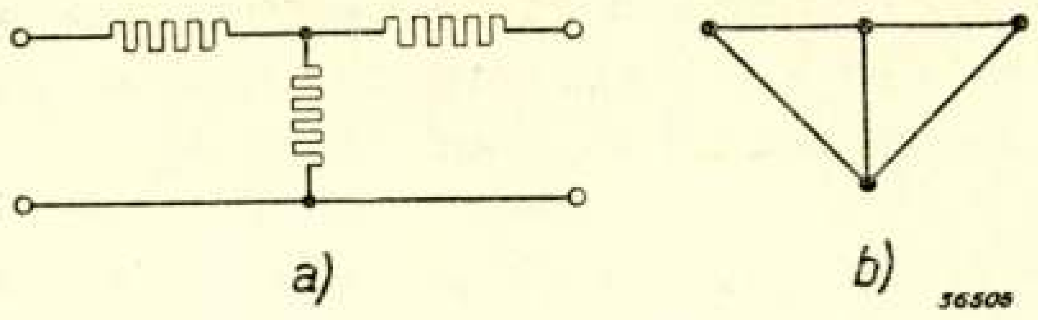
Wij willen beginnen met deze meetkundige configuraties der netwerken in het algemeen te onderzoeken (5). Bij netwerken, welke klemmenparen hebben, vatten wij deze klemmenparen ook elk als een tak van de configuratie op. Hebben wij bijv. te maken met een vierpool, zooals geteekend in fig. 1a, welke bestaat uit twee klemmenparen verbonden door drie in ster ge-

---

[1]) In plaats van duaal worden ook gebruikt de woorden reciprook (in het Duitsch widerstandsreziprok) of invers.

[2]) De cijfers tusschen haakjes verwijzen naar de literatuuropgave aan het einde van het artikel.

schakelde weerstanden, dan bevat deze vier knooppunten, die door vijf takken verbonden zijn, en kunnen wij de configuratie van deze vierpool teekenen, zooals fig. 1b aangeeft. Doordat

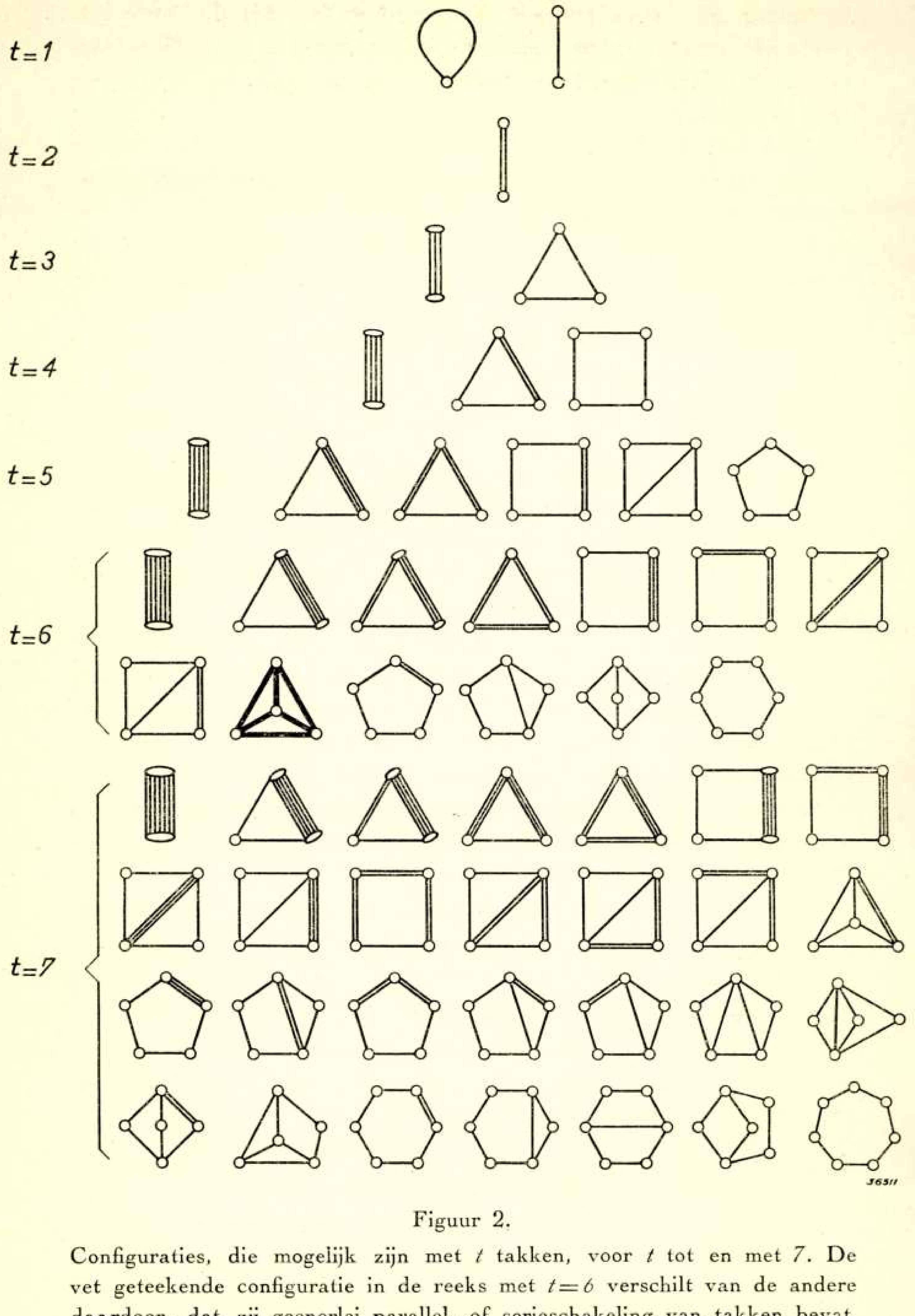


Figuur 1.
Een netwerk met twee klemmenparen (a) en de configuratie hiervan (b).

wij de klemmenparen als takken van de configuratie beschouwen, loopen de stroomen geheel in de configuratie rond. Wij kunnen zoodoende van configuraties afzien, welke uit twee deelen bestaan, die niet of slechts in één punt met elkaar samenhangen, aangezien daarbij geen stroom van het ééne deel van de configuratie naar het andere deel kan loopen en de twee deelen dus electrisch geheel onafhankelijk van elkaar zijn.[1])

Wij teekenen nu achtereenvolgens alle configuraties, die met een bepaald aantal takken mogelijk zijn. Tot en met zeven takken is dit gedaan in fig. 2 (volledigheidshalve zijn hierin ook de configuraties met één tak geteekend, welke kortgesloten of open zijn kan). Met twee takken is maar één configuratie mogelijk. Met drie takken krijgt men twee configuraties, met vier takken drie, met vijf zijn het er al zes, met zes takken 13, met zeven takken 28, enz. De beide configuraties met drie takken ontstaan uit de configuraties met twee takken, wanneer wij in deze laatste een tak vervangen door twee takken parallel of door twee takken in serie. Op dezelfde wijze kunnen alle configuraties met vier takken afgeleid worden uit de configuraties met drie takken, en evenzoo alle configuraties met vijf takken uit de configuraties met vier takken, waarvan men zich aan de hand van fig. 2 gemakkelijk kan overtuigen. Bij de configuraties met zes takken gaat deze afleiding echter niet meer geheel op. Onder deze configuraties is er nl. één (in fig. 2 vet aangegeven), waarin geen enkel paar takken in serie of parallel staat, zoodat deze configuratie dus ook niet op de beschreven wijze uit een configuratie met één tak minder kan worden afgeleid. De con-

[1]) Wij zullen nl. van wederzijdsche inducties afzien, hoewel het mogelijk is de beschouwingen tot deze uit te breiden.



Figuur 2.

Configuraties, die mogelijk zijn met t takken, voor t tot en met 7. De vet geteekende configuratie in de reeks met $t = 6$ verschilt van de andere daardoor, dat zij geenerlei parallel- of serieschakeling van takken bevat.

figuraties met zeven takken kunnen weer alle uit de configuraties met zes takken worden afgeleid, waarbij uit de vet geteekende configuratie met zes takken twee configuraties met zeven takken ontstaan.

Daar het aantal configuraties met meer dan zeven takken zeer groot wordt, willen wij ons bij het teekenen daarvan beperken tot die configuraties, welke *geen* takken in serie of parallel bevatten, daar de andere configuraties steeds op de genoemde wijze uit de configuraties met één tak minder kunnen worden afgeleid. Configuraties zonder serie- en parallelschakeling zijn slechts mogelijk met bepaalde aantallen t en k van takken en knooppunten, zooals blijkt uit het volgende (waarbij van de configuraties met één tak, welke ook hiertoe behooren, is afgezien).

Bevat een configuratie geen takken in serie, dan komen in ieder knooppunt minstens 3 takken samen. Tellen wij voor alle knooppunten de daarin samenkomende takken, dan komen wij dus in totaal tot *minstens* $3k$ takken. Hierbij is echter iedere tak tweemaal geteld, zoodat

$$t \geqq 3k/2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Bevat een configuratie geen takken parallel, dan kan zij niet meer takken bevatten, dan indien ieder knooppunt met ieder ander knooppunt door een tak verbonden wordt. In ieder knooppunt komen dus hoogstens $k-1$ takken samen. Tellen wij voor alle knooppunten de daarin samenkomende takken, dan komen wij dus in totaal tot *hoogstens* $k(k-1)$ takken, waarbij weer iedere tak tweemaal is geteld, zoodat

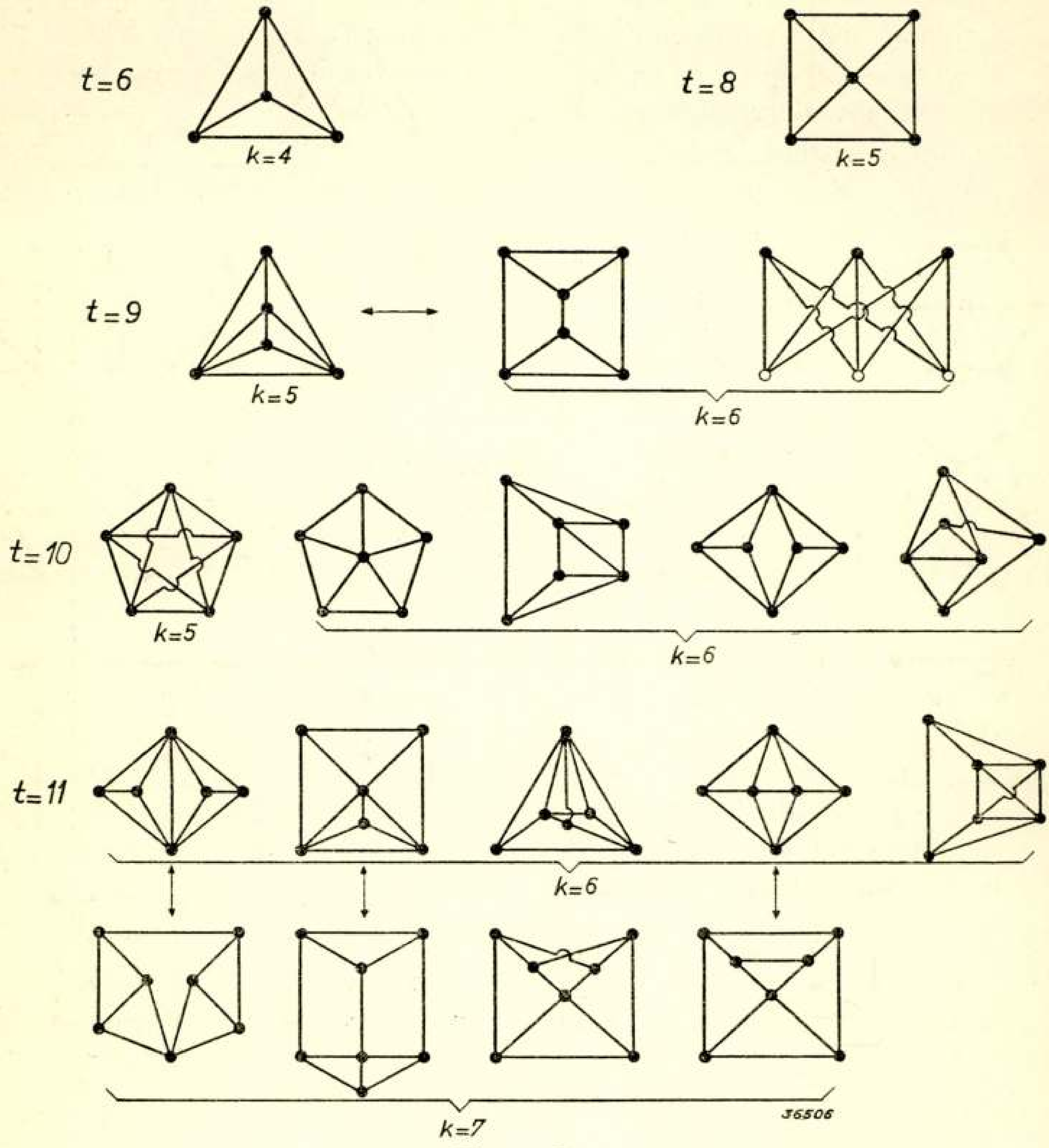
$$t \leqq k(k-1)/2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Uit 1) en 2) volgt $k(k-1) \geqq 3k$, dus $k \geqq 4$, waaruit met 1) volgt, dat $t \geqq 6$ moet zijn. Inderdaad vonden wij onder de in fig. 2 weergegeven configuraties eerst met *zes* takken een configuratie, die geen serie- of parallelschakeling bevat. De waarden van k, die bij bepaalde waarden van t op grond van 1) en 2) mogelijk zijn, worden gegeven door de volgende tabel:

$t=$	6	7	8	9	10	11	12
$k=$	4	–	5	5 6	5 6	6 7	6 7 8

In fig. 3a en b zijn deze configuraties tot en met 12 takken geteekend.

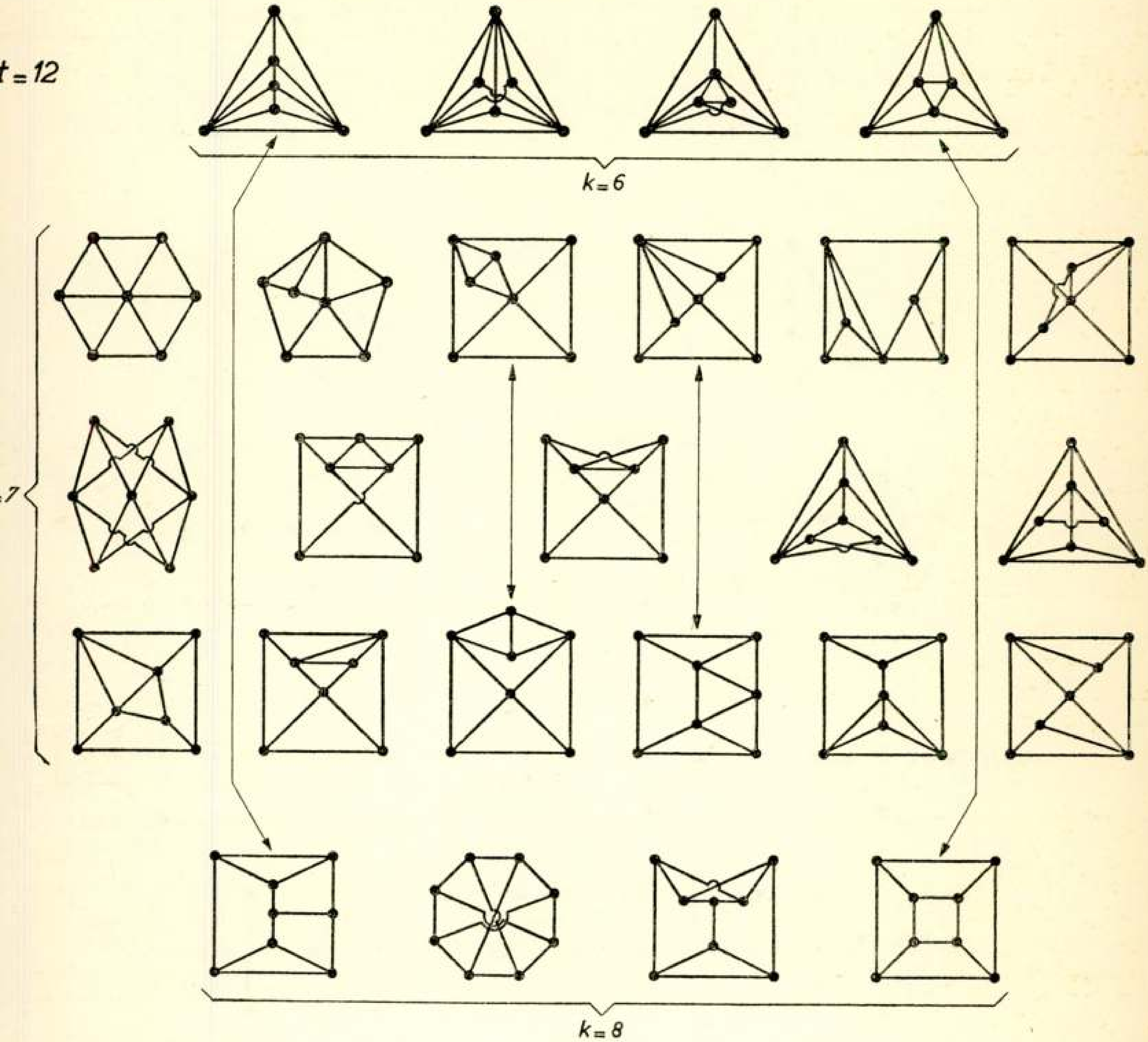
De reeds in fig. 2 voorkomende configuratie met zes takken is de configuratie van de brug van Wheatstone. Alle takken



Figuur 3a.

en knooppunten zijn hierin gelijkwaardig, wat het beste te zien is, wanneer men zich de figuur voorstelt als een tetraeder (fig. 4a). Op overeenkomstige wijze kan men zich de configuratie met $t = 8$ als een vierzijdige pyramide voorstellen (fig. 4b), die met $t = 9$, $k = 5$ als twee op elkaar gezette tetraeders (fig. 4c). Met $t = 9$, $k = 6$ zijn twee configuraties mogelijk, waarvan wij de eerste als een driezijdig prisma kunnen opvatten (fig. 4d).

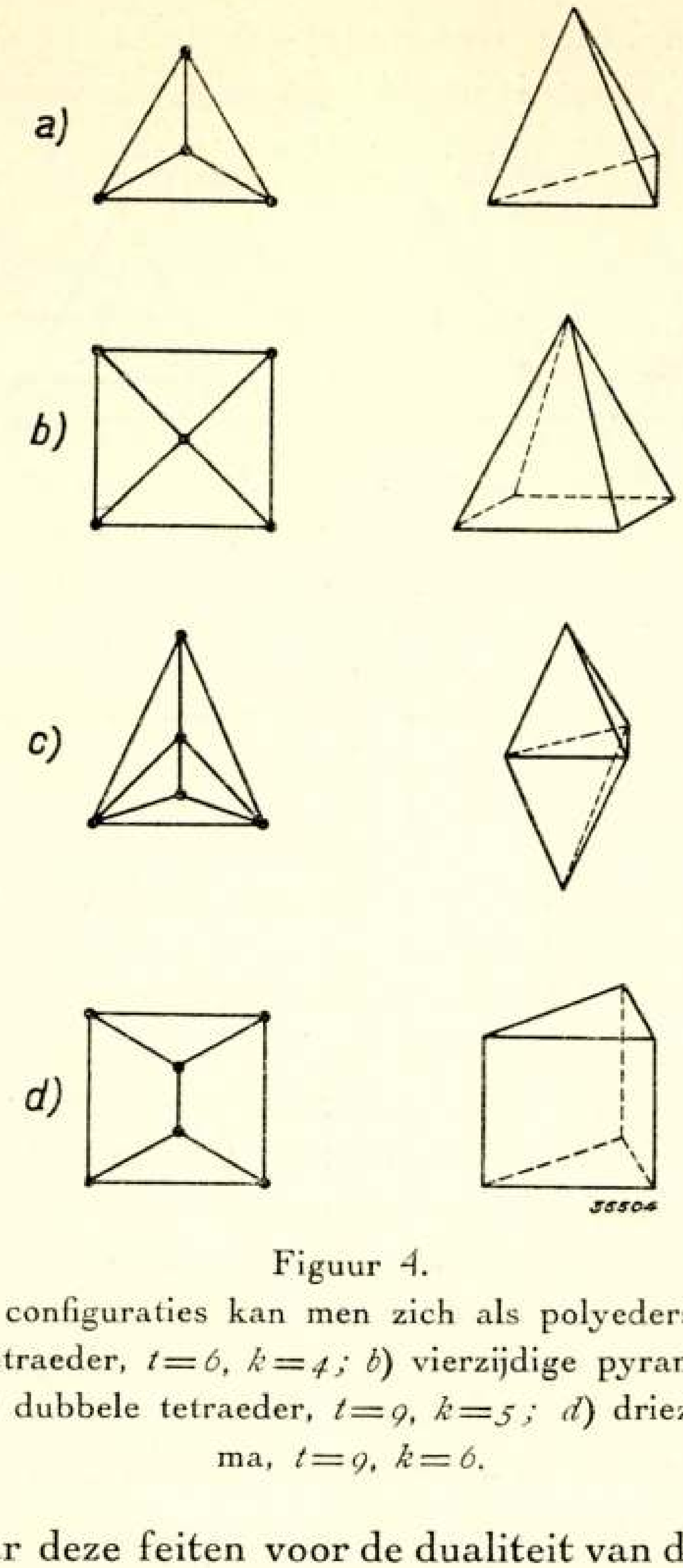
De tweede bestaat uit twee stellen van drie knooppunten, waarbij elk knooppunt van het éene stel met elk knooppunt van het andere stel is verbonden. Hiervoor is een dergelijke interpre-



Figuur 3b.

Configuraties voor *t* tot en met 12, waarin geen parallel of serieschakeling van takken voorkomt. Alle planaire configuraties (zie hieronder) zijn geteekend zonder kruisen. De door pijlen verbonden configuraties zijn ten opzichte van elkaar duaal, de overige planaire configuraties zijn in zichzelf duaal.

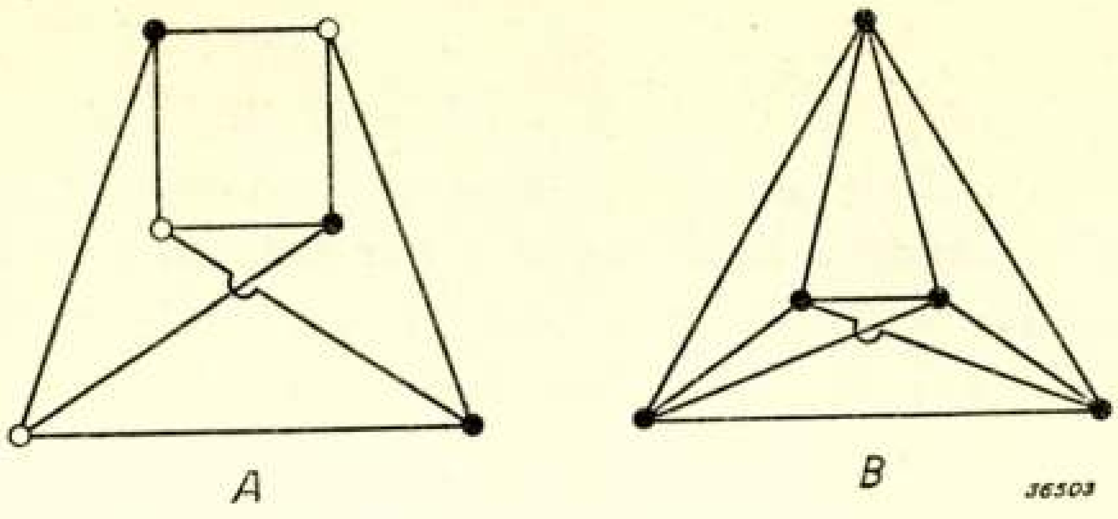
tatie als een eenvoudig lichaam (polyeder) niet meer mogelijk, evenmin als bij de configuratie met $t = 10$, $k = 5$, waarin elk knooppunt met elk ander knooppunt is verbonden (de volledige



Figuur 4.
Sommige configuraties kan men zich als polyeders voorstellen; *a*) tetraeder, $t=6$, $k=4$; *b*) vierzijdige pyramide, $t=8$, $k=5$; *c*) dubbele tetraeder, $t=9$, $k=5$; *d*) driezijdig prisma, $t=9$, $k=6$.

vijfhoek). Daar deze feiten voor de dualiteit van doorslaggevende beteekenis zijn, willen wij ze aan een andere beschouwing onderwerpen.

De laatstgenoemde twee configuraties, welke wij in het vervolg met A en B zullen aanduiden en die in fig. 5 nog eens afzonderlijk zijn geteekend, kunnen niet in een plat vlak geteekend worden zonder dat tenminste twee takken elkaar kruisen. Hiervan kan men zich door probeeren gemakkelijk overtuigen, en men kan het ook rechtstreeks bewijzen (zie hieronder). Configuraties, die wel in een plat vlak geteekend kunnen worden zonder kruisen, noemen wij *planair*; A en B zijn dus niet planair. Men kan aantoonen, dat alle niet-planaire configuraties door het openen of kortsluiten van takken tot A of B herleid



Figuur 5.

De twee grondtypen A en B van alle *niet-planaire* configuraties. De configuratie A, met $t = 9$, $k = 6$, is opgebouwd uit twee stellen van drie knooppunten, waarbij elk punt van het éene stel (kringen) verbonden is met elk punt van het andere stel (punten). De configuratie B, met $t = 10$, $k = 5$, bestaat uit vijf knooppunten, waarvan elk met alle andere is verbonden. Beide configuraties, die reeds in fig. 3 voorkomen, zijn hier zoo geteekend, dat slechts één kruising van takken optreedt.

kunnen worden, zoodat *A* en *B* de grondtypen der niet-planaire configuraties vormen (8, 16).

Het niet planair zijn van *A* en *B* staat nu in verband met het hierboven opgemerkte feit, dat het niet mogelijk is de takken van deze configuraties als de ribben van een polyeder op te vatten. Dit is als volgt in te zien. Een planaire configuratie kunnen wij ook op een *bol* teekenen zonder dat twee takken elkaar kruisen. Het oppervlak van de bol wordt dan door de configuratie in een aantal zijvlakken verdeeld, waarbij het oorspronkelijk de configuratie omgevende deel van het platte vlak ook een zijvlak van de bol wordt. Daar een bol en een polyeder in topologisch opzicht gelijkwaardig zijn, kunnen wij de op de bol geteekende configuratie ook als een polyeder opvatten en kunnen wij de in fig. 4 aangegeven polyeders op deze wijze uit de bijbehoorende configuraties ontstaan denken. Omgekeerd kunnen wij elke op een bol geteekende configuratie[1]) ook in het platte vlak teekenen[2]).

[1]) Wanneer wij in het vervolg van een op een bol of ander oppervlak geteekende configuratie spreken, zullen wij stilzwijgend veronderstellen, dat dit zonder kruisen geschiedt.

[2]) Wij kunnen elk zijvlak van de bol laten overgaan in het de configuratie omgevende deel van het platte vlak. Op de bol geteekend bevat bijv. de configuratie met acht takken uit fig. 3 vier driehoeken en een vierhoek. In fig. 3 is zij zoo in het platte vlak geteekend, dat de vierhoek de omtrek vormt. Zij kan echter ook zoo worden geteekend, dat één van de driehoeken de omtrek vormt.

De begrenzing van elk zijvlak, waarin een bol door een daarop geteekende configuratie wordt verdeeld, vormt een *maas* in de aan het begin gedefinieerde zin. Tusschen het aantal m dezer zijvlakken of mazen, het aantal t der takken en het aantal k der knooppunten bestaat een betrekking, welke de naam draagt van *Eulersche polyederformule* en welke luidt:

$$k - t + m = 2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

Met behulp hiervan kunnen wij het niet-planair zijn van de configuraties A en B bewijzen. Stel, dat A (met $t = 9$, $k = 6$) wel planair is. Op de bol geteekend moet dan $m = t - k + 2 = 5$ zijn. Daar elke tak tot twee dezer mazen moet behooren, zijn voor deze mazen samen $2t = 18$ takken beschikbaar. A bevat echter geen driehoeken, zoodat voor de 5 mazen minstens $5 \times 4 = 20$ takken noodig zijn, dus meer dan de beschikbare. Hieruit volgt, dat A niet planair kan zijn. Een soortgelijk betoog kunnen wij voor B houden (9).

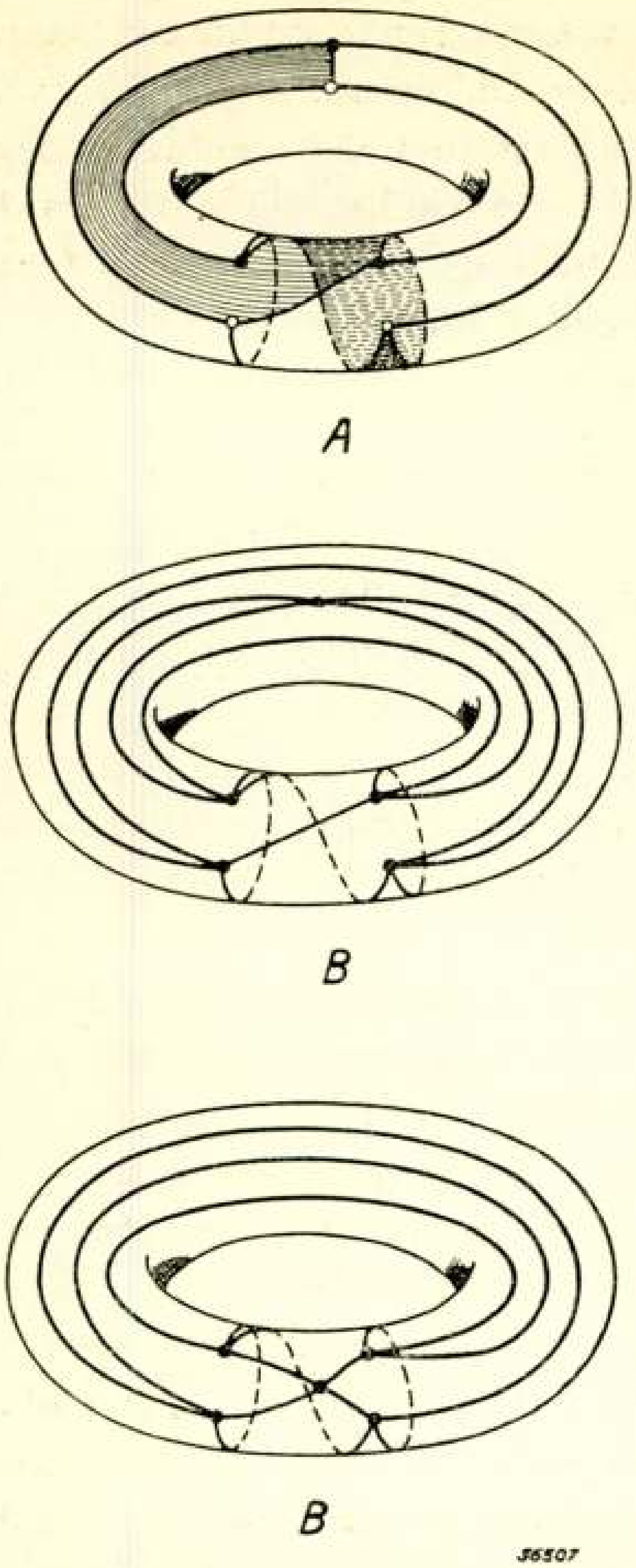
A en B kunnen wèl worden geteekend op andere oppervlakken (6). Alvorens dit te toonen willen wij definieeren, wat wij *in het algemeen* verstaan onder de uitdrukking: een configuratie is op een bepaald oppervlak geteekend. Hiertoe moeten wij in de configuratie zoodanige mazen aangeven, dat elke tak tot twee mazen behoort. Wij kunnen dan elk dezer mazen als de begrenzing van een zijvlak opvatten, welke zijvlakken samen een doorloopend oppervlak vormen (3). Wij zeggen nu, dat configuratie op dit oppervlak is geteekend[1]). Noemen wij het aantal dezer mazen of zijvlakken weer m, dan is voor een op een bol geteekende configuratie, zooals wij reeds vermeldden, $k - t + m = 2$, voor een op elk ander oppervlak geteekende configuratie steeds $k - t + m < 2$ [2]).

Voor een *torus* bijv. is $k - t + m = 0$. A kan op een torus worden geteekend, zooals in fig. 6 is gedaan; de torus wordt hierbij in $m = 9 - 6 = 3$ mazen verdeeld. Ook B kan op een torus worden geteekend, en wel op twee manieren, zooals fig. 6

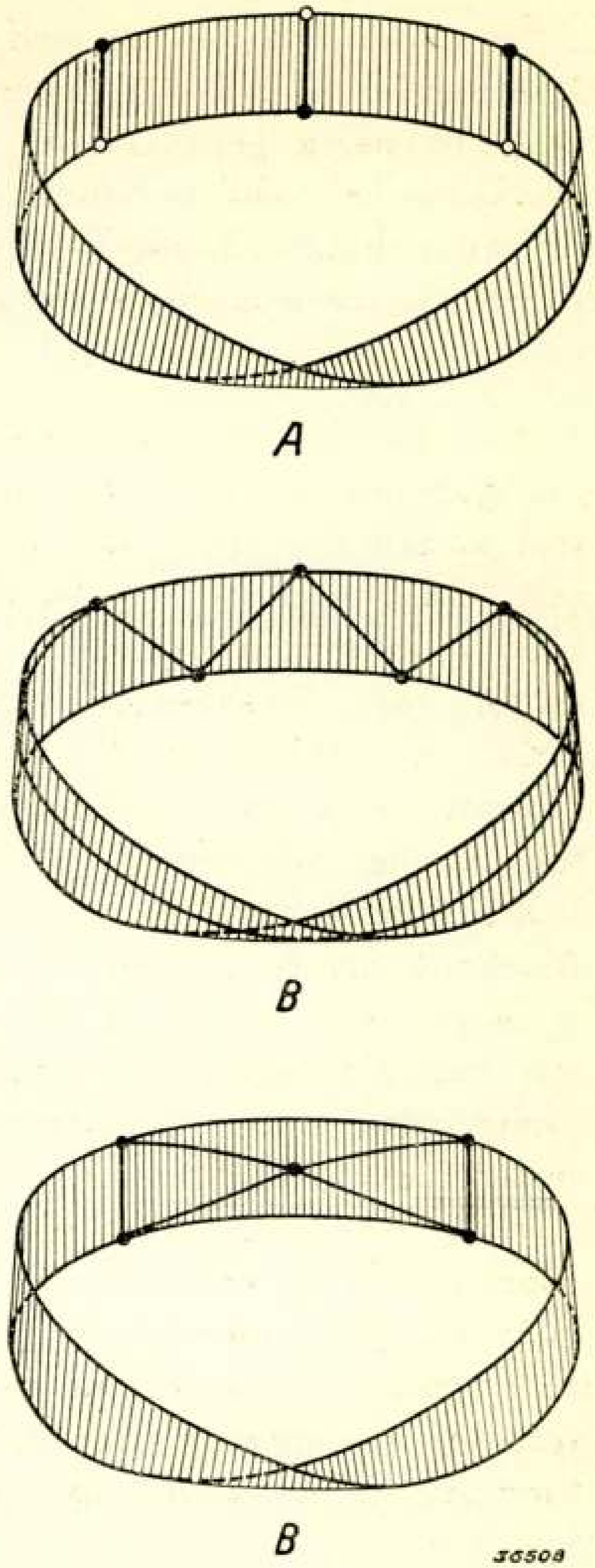
---

[1]) Doordat wij van configuraties, welke uit twee deelen bestaan, welke niet of slechts in één punt samenhangen, hebben afgezien, is het zonder meer op een bol (of in een plat vlak) teekenen van een planaire configuratie in overeenstemming met deze definitie, wanneer wij, zooals wij boven ook gedaan hebben, voor de m mazen nemen de begrenzingen van de zijvlakken, waarin de bol door de configuratie wordt verdeeld.

[2]) Van oppervlakken met meervoudige punten, zie hieronder, is hierbij afgezien.



Figuur 6.
De niet-planaire configuraties *A* en *B* geteekend op een torus. *A* verdeelt de torus in 3 mazen, elk van 6 takken. Eén der zijvlakken, die door deze mazen worden begrensd, is door arceering aangegeven. *B* verdeelt de torus òf in 2 mazen van 5, 1 maas van 4 en 2 mazen van 3 takken, òf in 5 mazen van 4 takken.



Figuur 7.
De niet-planaire configuraties *A* en *B*, geteekend op een Möbius-band. *A* vormt hierop 3 mazen van 4 en één van 6 takken. *B* vormt òf 4 mazen van 3 en 2 van 4 takken, òf 5 mazen van 3 en één van 5 takken.

eveneens aangeeft, waarbij beide malen de torus in 5 mazen wordt verdeeld. Weer een ander soort oppervlak is de zg. *Möbius-band*, welke ontstaat door in een open band een halve

slag te leggen en dan de einden met elkaar te verbinden. Hierdoor kunnen wij, langs de band rondloopend, uitgaande van een willekeurig punt het overeenkomstige punt aan de andere zijde van de band bereiken. Dergelijke oppervlakken heeten eenzijdige oppervlakken. Voor de Möbius-band is $k - t + m = 1$. De configuraties A en B kunnen ook hierop worden geteekend, zooals fig 7 aangeeft, en wel B weer op twee manieren[1]).

Dualiteit

Wij willen de in de inleiding gegeven voorbeelden nog met een derde voorbeeld uitbreiden, waartoe wij de netwerken van fig. 8a en b beschouwen. Over het netwerk van fig. 8a is het volgende te zeggen:

Een spanningsbron V is gesloten over twee weerstanden R_1 en R_2 in serie. De stroom door de weerstanden is:

$$I = \frac{V}{R_1 + R_2}.$$

De spanningen V_1 en V_2 op R_1 en R_2 zijn:

$$V_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V, \qquad V_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V.$$

Het systeem bevat drie takken en drie knooppunten. De spanningen op de drie takken zijn gelijk aan de verschillen van telkens twee der knooppuntspotentialen v_0, v_1 en v_2:

$$v_1 - v_0 = V_1, \quad v_2 - v_1 = V_2, \quad v_2 - v_0 = V.$$

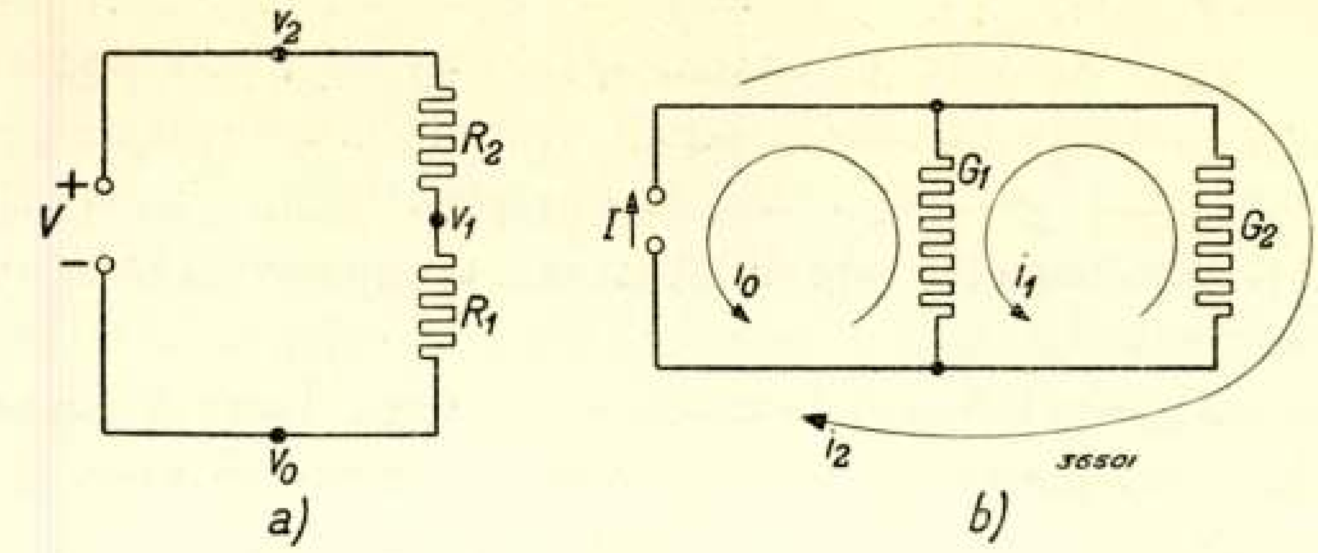
Daar de spanningen op de takken zich niet wijzigen, indien alle knooppuntspotentialen met eenzelfde bedrag worden vermeerderd, zijn deze laatste slechts op een additieve constante na bepaald.

Over het netwerk van fig. 8b is geheel overeenkomstig het volgende te zeggen:

Een stroombron I is gesloten over twee geleidingsvermogens G_1 en G_2 parallel. De spanning op de geleidingsvermogens is:

$$V = \frac{I}{G_1 + G_2}.$$

[1]) Om geheel in overeenstemming met onze definitie over het teekenen van een configuratie op een oppervlak te blijven, zouden wij de rand van de Möbius-band ook als de begrenzing van een zijvlak moeten opvatten, waardoor een gesloten eenzijdig oppervlak ontstaat. Het is echter moeilijk om zich dit voor te stellen.



Figuur 8.
Twee eenvoudige netwerken, die ten opzichte van elkaar duaal zijn.

De stroomen I_1 en I_2 door G_1 en G_2 zijn:

$$I_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} I, \qquad I_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} I.$$

Het systeem bevat drie takken en drie mazen. De stroomen door de drie takken zijn gelijk aan de verschillen van telkens twee der maasstroomen i_0, i_1 en i_2:

$$i_1 - i_0 = I_1, \quad i_2 - i_1 = I_2, \quad i_2 - i_0 = I.$$

Daar de stroomen door de takken zich niet wijzigen, indien alle maasstroomen met eenzelfde bedrag worden vermeerderd, zijn deze laatste slechts op additieve constante na bepaald[1]).

Vergelijken wij de uitspraken over de beide systemen, dan zien wij, dat deze geheel in elkaar overgaan, wanneer wij de woorden spanning en stroom, weerstand en geleidingsvermogen, serieschakeling en parallelschakeling, knooppunt en maas, knooppuntspotentiaal en maasstroom met elkaar verwisselen. Netwerken, welke bovendien capaciteiten en zelfinducties bevatten, kunnen, zooals uit het in de inleiding gegeven voorbeeld volgt, op soortgelijke wijze aan elkaar toegevoegd zijn, waarbij ook nog de woorden capaciteit en zelfinductie moeten worden verwisseld.

Bij de veralgemeening van de aan de voorbeelden gevonden dualiteit gaan wij uit van de eisch, dat de knooppunten van het duale systeem overeen moeten komen met bepaalde mazen van het oorspronkelijke systeem. Wij zullen daarom telkens

[1]) Bij de gebruikelijke wijze van rekenen met maasstroomen wordt doorgaans één van deze gelijk nul gesteld. Voor het hier beoogde doel is het echter noodzakelijk hiervan af te zien.

uitgaan van bepaalde eigenschappen van de knooppunten van het duale systeem en dan eischen, dat de met die knooppunten overeenkomende mazen van het oorspronkelijke systeem overeenkomstige eigenschappen hebben. Het onderzoek geschiedt in vier stappen.

a) Daar elke tak van het duale systeem twee knooppunten verbindt, moet elke tak van het oorspronkelijke systeem de grens tusschen twee mazen kunnen vormen, en dus moeten wij in het oorspronkelijke systeem zoodanige mazen kunnen aangeven, dat elke tak tot twee mazen behoort. Wij kunnen dan weer elk dezer m mazen als de begrenzing van een zijvlak opvatten, welke zijvlakken samen een doorloopend oppervlak vormen.

b) Daar de spanning op elke tak van het duale systeem het verschil tusschen twee knooppuntspotentialen is, moet de stroom door elke tak van het oorspronkelijke systeem het verschil tusschen twee maasstroomen kunnen zijn, en dus moeten wij in de m volgens voorwaarde *a)* aangegeven mazen van het oorspronkelijke systeem stroomen in zoodanige richting rondloopend kunnen aannemen, dat de stroom door elke tak het verschil van twee maasstroomen is. Dit is niet steeds mogelijk, zooals blijkt, wanneer wij configuraties beschouwen, welke op een eenfig. 7 op een Möbius-band geteekende configuratie A de mazen zijdig oppervlak zijn geteekend. Wanneer wij bijv. in de in $a_1b_1a_2b_2a_1$, $b_2a_2b_3a_3b_2$, $a_3b_3a_1b_1a_3$ en $b_1a_2b_3a_1b_2a_3b_1$ beschouwen, dan behoort iedere tak wel tot twee mazen, maar kunnen wij daarin geen maasstroomen in zoodanige richting aannemen, dat de stroom door iedere tak het verschil van twee maasstroomen wordt. Er zijn steeds takken, welke door de bijbehoorende maasstroomen in *dezelfde* richting doorloopen worden.

c) Ook voorwaarde *b)* is voor de dualiteit niet voldoende, wat blijkt uit beschouwingen over de berekening van de stroomen en spanningen in een netwerk. Wij zullen daarom eerst hierover eenige opmerkingen maken.

Wanneer van een netwerk de waarden van de impedanties en van de stroom- en spanningsbronnen gegeven zijn, zijn de stroomen en spanningen van alle takken hierdoor geheel bepaald. Om deze te berekenen nemen wij voor een tak, welke een spanningsbron bevat, de stroom als onbekende aan; voor een tak, welke een stroombron bevat, nemen wij de spanning als onbekende aan; voor een tak, welke een impedantie bevat, kunnen wij naar believen de stroom of de spanning als onbekende aannemen, daar deze door de wet van Ohm met elkaar verbonden zijn. Wij moeten dus t onbe-

kenden bepalen, waarvoor wij t onafhankelijke vergelijkingen noodig hebben. Om deze te verkrijgen moeten wij van de voorwaarden van Kirchhoff gebruik maken, welke zeggen, dat voor elk knooppunt de som van de stroomen nul is en dat voor elke mogelijke maas de som van de spanningen nul is. Wij kunnen k knooppuntsvergelijkingen opschrijven, waarvan echter maar $k-1$ onafhankelijk zijn; immers hun som is identiek gelijk nul, omdat in deze som elke stroom eenmaal met positief en eenmaal met negatief teeken voorkomt (er zijn ook niet *minder* dan $k-1$ onafhankelijk, wat hieronder zal blijken). In een netwerk zijn doorgaans zeer vele mazen aan te wijzen en de hiervoor op te schrijven mazenvergelijkingen kunnen weer gedeeltelijk afhankelijk zijn. Uit het feit, dat de stroomen en spanningen door de gegevens geheel bepaald zijn, volgt, dat er $t-(k-1)$ onafhankelijke mazenvergelijkingen moeten bestaan[1]).

Wij moeten op deze wijze t vergelijkingen oplossen. Wij kunnen echter op andere wijze te werk gaan, waardoor minder dan t vergelijkingen ontstaan. Nemen wij nl. de k knooppuntspotentialen als onbekenden aan, dan wordt de spanning op elke tak het verschil van twee knooppuntspotentialen[2]). De mazenvergelijkingen gaan daardoor over in identiteiten. De knooppuntsvergelijkingen vormen k vergelijkingen met k onbekenden, waarvan er echter slechts $k-1$ onafhankelijk zijn en waaruit de knooppuntspotentialen op een constante na zijn te bepalen. Hieruit volgt tevens, dat niet minder dan $k-1$ knooppuntsvergelijkingen onafhankelijk zijn, daar deze dan niet voldoende zouden zijn om de knooppuntspotentialen op een constante na te berekenen.

In plaats van met knooppuntspotentialen kunnen wij ook met maasstroomen als onbekenden werken. Wij kunnen nl. in een aantal mazen rondloopende stroomen als onbekenden aannemen.

---

[1]) Kirchhoff (7) heeft rechtstreeks bewezen, dat er $k-1$ onafhankelijke knooppuntsvergelijkingen bestaan, Ahrens (1), dat er $t-k+1$ onafhankelijke mazenvergelijkingen bestaan, waaruit dus blijkt, dat beide soorten vergelijkingen gezamenlijk inderdaad voldoende zijn voor het berekenen van de t onbekende stroomen of spanningen. In de tekst zijn wij van dit laatste feit, als physisch vanzelfsprekend, uitgegaan.

[2]) Voor een tak, welke een spanningsbron bevat, is het verschil van de twee bijbehoorende knooppuntspotentialen gelijk aan de grootte van de spanningsbron, zoodat wij slechts één van deze beide als onbekende behoeven aan te nemen. Wij moeten nu echter de stroom door de spanningsbron als onbekende invoeren, zoodat het aantal onbekenden k blijft.

De stroom in elke tak wordt dan gelijk aan de algebraïsche som van een aantal maasstroomen[1]) en de knooppuntsvergelijkingen gaan over in identiteiten. Leveren de mazenvergelijkingen voor de gekozen mazen $t-k+1$ onafhankelijke vergelijkingen op, dan zagen wij boven, dat daarmee voor alle mogelijke mazen de Kirchhoff'sche voorwaarde tot uitdrukking is gebracht en kunnen wij dus ook langs deze weg de stroomen en spanningen berekenen. Komen wij tot minder dan $t-k+1$ onafhankelijke mazenvergelijkingen, dan wil dit zeggen, dat wij nog in andere dan de gekozen mazen een maasstroom rondloopend moeten aannemen en de vergelijking hiervoor moeten opschrijven. Voorbeelden hiervan volgen hieronder. Het hangt van de aard van het netwerk af, aan welke berekeningsmethode de voorkeur zal worden gegeven. Is $k-1$ kleiner dan $t-k+1$, dan voert het opschrijven van de knooppuntsvergelijkingen tot het kleinste aantal vergelijkingen, in het andere geval geldt dit voor de mazenvergelijkingen.

Wij willen thans nagaan, wat uit het bovenstaande voor de dualiteit is af te leiden. Nemen wij voor het duale systeem de k knooppuntspotentialen als onbekenden aan en schrijven wij hiervoor de k knooppuntsvergelijkingen op, dan komen wij tot $k-1$ onafhankelijke vergelijkingen, welke voldoende zijn om de knooppuntspotentialen op een constante na te bepalen.

Wegens de dualiteit moeten wij dus in het oorspronkelijke systeem, als wij de m volgens voorwaarde *b)* aangegeven maasstroomen als onbekenden aannemen en hiervoor de m mazenvergelijkingen opschrijven, komen tot $m-1$ onafhankelijke vergelijkingen, welke voldoende zijn om deze maasstroomen op een constante na te bepalen (dat van deze m vergelijkingen *hoogstens* $m-1$ onafhankelijk zijn, volgt uit het feit, dat hun som identiek gelijk nul is, omdat in deze som elke spanning eenmaal met positief en eenmaal met negatief teeken voorkomt). Uit deze eisch volgt, dat als aan $m-1$ van deze mazenvergelijkingen is voldaan, voor elke mogelijke maas van het systeem de som van de spanningen nul zal moeten zijn, want alleen dan kunnen wij voor het berekenen van de stroomen met deze $m-1$ vergelij-

[1]) Voor een tak, welke een stroombron bevat, is de algebraïsche som van de bijbehoorende maasstroomen gelijk aan de grootte van de stroombron, zoodat wij één van deze maasstroomen in de andere kunnen uitdrukken, en in plaats daarvan de spanning op de tak als onbekende moeten invoeren, zoodat het aantal onbekenden hierdoor weer niet verandert.

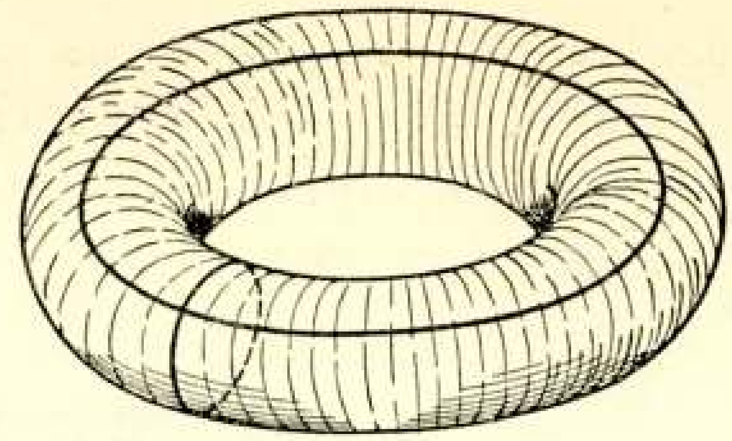
kingen volstaan. Het aantal $m-1$ moet dus gelijk zijn aan het hierboven afgeleide aantal van $t-(k-1)$ onafhankelijke mazenvergelijkingen, welke voor elk willekeurig netwerk bestaan. Voor de dualiteit volgt hieruit de voorwaarde:

$$k-t+m=2.$$

Deze vergelijking komt overeen met de Eulersche polyeder-formule. In de topologie wordt aangetoond, dat deze voor een doorloopend oppervlak, uit het netwerk ontstaan zooals onder *a)* is aangegeven, alleen dan kan gelden, indien dit oppervlak in topologisch opzicht gelijkwaardig is met een bol (tenzij het oppervlak zg. meervoudige punten bevat; deze oppervlakken zullen wij hieronder beschouwen en aantoonen, dat zij voor de dualiteit niet in aanmerking komen). Voor de dualiteit is dus noodig, dat het netwerk op een bol geteekend kan worden zonder kruisen, met andere woorden, dat het netwerk planair is[1]).

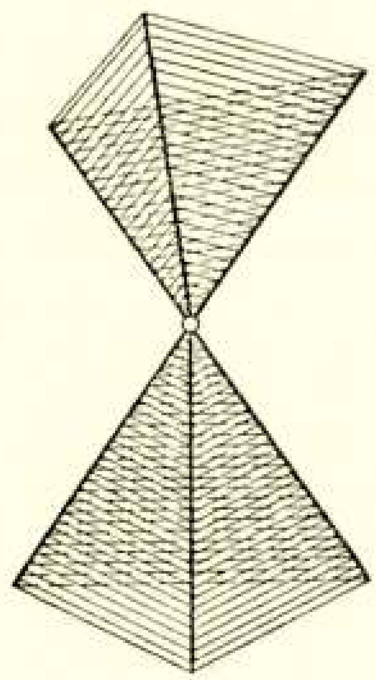
Als voorbeeld van een netwerk, waarin wij weliswaar op een zoodanige wijze mazen kunnen aangeven, dat elke tak tot twee mazen behoort en elke stroom het verschil van twee maasstroomen is, terwijl wij toch niet met de vergelijkingen voor deze mazen kunnen volstaan, beschouwen wij een netwerk, dat op een torus is geteekend. Schrijven wij voor alle m mazen, die de zijvlakken van de torus begrenzen, de vergelijkingen op, dan krijgen wij slechts $m-1$ onafhankelijke mazenvergelijkingen, terwijl, daar voor de torus $k-t+m=0$ is, er $t-k+1=m+1$ onafhankelijke mazenvergelijkingen bestaan, zoodat wij twee vergelijkingen te weinig hebben gekregen. Dit komt, omdat op de torus twee soorten mazen bestaan, die het oppervlak van de torus niet in twee deelen scheiden (zie fig. 9) en waarvoor wij afzonderlijke vergelijkingen moeten opschrijven om uit te drukken, dat ook voor deze mazen de som van de spanningen nul is. Willen wij in dit geval de stroomen met behulp van mazenvergelijkingen berekenen, dan zullen wij, behalve in de mazen, welke de zijvlakken van de torus begrenzen, in nog twee mazen, nl. een maas van elk der beide in fig. 9 aangegeven soorten, een onbekende maasstroom moeten aannemen en voor al deze mazen de vergelijkingen moeten opschrijven. Hierdoor zullen door sommige takken meer dan twee maasstroomen loopen.

[1]) Reeds W. Feussner (4, pag. 1316) heeft erop gewezen, dat de berekening van netwerken door middel van maasstroomen, waarbij de stroom door elke tak het verschil tusschen twee maasstroomen is, alleen mogelijk is voor planaire netwerken.



Figuur 9.
Op een torus kan men twee soorten mazen aangeven, die het oppervlak niet in twee deelen scheiden.

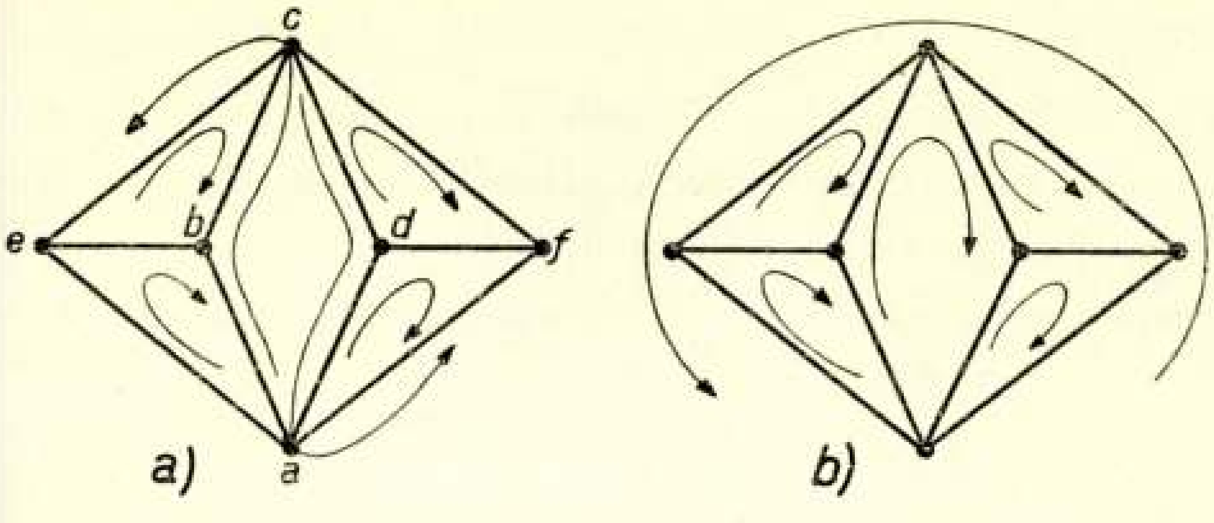
d) Wij willen nu de oppervlakken met meervoudige punten onderzoeken. Tot dit begrip komt men door bij het volgens *a*) uit de configuratie afgeleide doorloopende oppervlak de zijvlakken te beschouwen, die in een bepaald punt samenkomen. Deze vormen samen één of meer groepen, waarbij elk zijvlak één tak met het volgende en één tak met het voorafgaande lid van zijn groep gemeen heeft en waarbij het laatste lid van elke groep weer een tak gemeen heeft met het eerste lid. Is er meer dan één groep in een punt, dan hebben wij te doen met een *meervoudig* punt van het oppervlak (zie fig. 10) (3).



Figuur 10.
Voorbeeld van een meervoudig punt van een oppervlak.

De oppervlakken met meervoudige punten kunnen uit één oppervlak of uit verschillende deeloppervlakken zonder meervoudige punten ontstaan door eenige knooppunten op elkaar te leggen. Zijn zij uit één oppervlak ontstaan, dan wordt $k-t+m < 2$, daar voor een oppervlak zonder meervoudige punten $k-t+m$ hoogstens 2 is en door het op elkaar leggen van eenige knooppunten t en m niet veranderen, k echter kleiner wordt. Ontstaan zij uit verschillende deeloppervlakken en beperken wij ons tot die oppervlakken, waarin wij weer m volgens voorwaarde *b*) aangegeven maasstroomen kunnen aannemen, dan is voor ieder deeloppervlak één van de mazenvergelijkingen van de andere afhankelijk en zal dus voor het geheele oppervlak het aantal onafhankelijke mazenvergelijkingen kleiner dan

$m-1$ zijn. De oppervlakken met meervoudige punten voldoen dus niet aan de onder *c*) gevonden voorwaarden.



Figuur 11.
Neemt men in het geteekende netwerk maastroomen aan als in a) is aangegeven, dan zijn a en c meervoudige punten van het gevormde oppervlak. Bij keuze der maasstroomen als in b) treden geen meervoudige punten op.

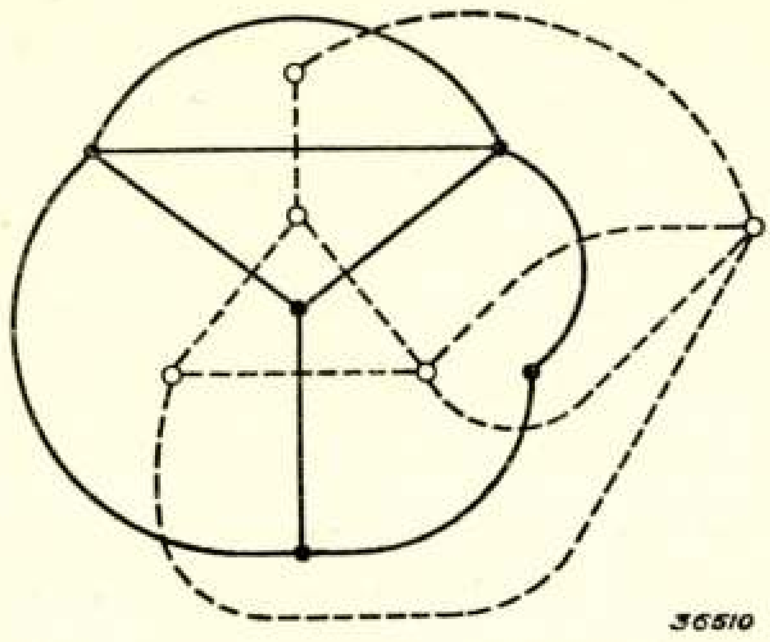
Een voorbeeld van een oppervlak met meervoudige punten, dat uit twee deeloppervlakken bestaat, wordt gevormd door de configuratie van fig. 11a, wanneer wij daarin maasstroomen aannemen, zooals door de pijlen wordt aangegeven. De punten *a* en *c* zijn dan meervoudig, terwijl *abce* en *adcf* de deeloppervlakken vormen. De configuratie bevat 6 knooppunten, 10 takken en 6 mazen, zoodat $k-t+m=2$ is. Schrijven wij de vergelijkingen voor de 6 aangegeven mazen op, dan vinden wij echter slechts 4 onafhankelijke vergelijkingen en is nog niet uitgedrukt, dat ook vóór de maas *abcda* de som van de spanningen nul is. Nemen wij echter maasstroomen aan, zooals aangegeven is in fig. 11b, dan bevat het bijbehoorende oppervlak geen meervoudige punten meer en komen wij tot 5 onafhankelijke mazenvergelijkingen.

Constructie van het duale netwerk

Wij vonden hierboven, dat een noodzakelijke voorwaarde, waaraan een netwerk moet voldoen, opdat het een duaal systeem kan bezitten, is, dat het netwerk planair is. Wij zullen nu aantoonen, dat deze noodige voorwaarde tevens voldoende is, door een weg aan te geven, waarlangs uit elk planair netwerk een duaal systeem kan worden geconstrueerd. Daarmee hebben wij dan het volgende resultaat gevonden (12,2):
Een netwerk bezit dan en alleen dan een duaal systeem, indien het planair is.

Is een netwerk planair, dan kunnen wij langs de volgende weg het duale systeem vinden. Teekenen wij de configuratie van het netwerk zonder kruisen op een bol (of in een plat vlak),

dan zijn daardoor bepaalde mazen naar voren gebracht, nl. de mazen, welke de zijvlakken van de bol begrenzen. Deze mazen moeten nu met de knooppunten van het duale systeem overeenkomen. Binnen ieder van deze mazen (in het platte vlak ook buiten de buitenste maas) nemen wij daarom een nieuw knooppunt aan en verbinden elk paar dezer nieuwe knooppunten, welke in naburige mazen liggen, door een nieuwe tak, welke de gemeenschappelijke tak van deze mazen kruist (zie fig. 12).



Figuur 12.
Constructie van de duale configuratie (gestippelde takken) bij een gegeven configuratie (getrokken).

Hebben de mazen meer dan één tak gemeen, dan worden de bijbehoorende nieuwe knooppunten ook door meer dan één tak verbonden. Wij komen zoo tot een nieuwe planaire configuratie, welke de duale configuratie van de oorspronkelijke is en waarbij ieder oorspronkelijk knooppunt weer in een nieuwe maas komt te liggen. *De dualiteit is dus wederkeerig.* In fig. 3 is door pijlen aangegeven, welke configuraties ten opzichte van elkaar duaal zijn. De andere planaire configuraties uit deze figuur zijn in zichzelf duaal.

Om te zorgen, dat aan elke vergelijking, welke voor het oorspronkelijke systeem is op te schrijven, een geheel analoge vergelijking voor het duale systeem beantwoordt, moeten wij, op de wijze zooals hierboven is aangegeven, de electrische grootheden van het oorspronkelijke systeem veranderen in overeenkomstige grootheden van het duale systeem. Een stroom I bijv. gaat daarbij over in een spanning V. Daar deze grootheden verschillende dimensies hebben, kunnen wij ze niet zonder meer aan elkaar gelijk stellen, maar moeten wij een dimensiefactor K invoeren, welke de dimensie van een weerstand heeft en waarvan wij de grootte willekeurig kunnen kiezen. Hebben wij

op deze wijze $V = KI$ gesteld, dan geldt voor elk paar aan elkaar toegevoegde impedanties der twee duale netwerken, dat hun product gelijk aan K^2 is.

Door deze toevoeging gaan de maasstroomen en de mazenvergelijkingen van het oorspronkelijke systeem over in de knooppuntspotentialen en de knooppuntsvergelijkingen van het duale systeem en omgekeerd, waaruit volgt, dat ook aan iedere betrekking en iedere eigenschap van het oorspronkelijke systeem een overeenkomstige betrekking en een overeenkomstige eigenschap van het duale systeem beantwoordt. Immers, alle vergelijkingen, welke wij voor een bepaald systeem kunnen opschrijven, zijn òf mazenvergelijkingen òf knooppuntsvergelijkingen òf zij brengen de wet van Ohm voor een bepaalde tak tot uitdrukking. Nu hebben wij door de gemaakte toevoegingen bereikt, dat de mazenvergelijkingen, welke bij de zijvlakken van de bol behooren, door de toevoeging overgaan in de knooppuntsvergelijkingen van het duale systeem en omgekeerd. Verder zijn alle andere mazenvergelijkingen van het oorspronkelijke systeem van de eerstgenoemde mazenvergelijkingen afhankelijk, zoodat hiermee vergelijkingen voor het duale systeem overeen zullen komen, welke van de knooppuntsvergelijkingen van het duale systeem afhankelijk zijn. Tenslotte gaat een vergelijking, welke de wet van Ohm tot uitdrukking brengt voor een tak van het oorspronkelijke systeem door de gemaakte toevoeging over in de uitdrukking voor de wet van Ohm voor de overeenkomstige tak van het duale systeem.

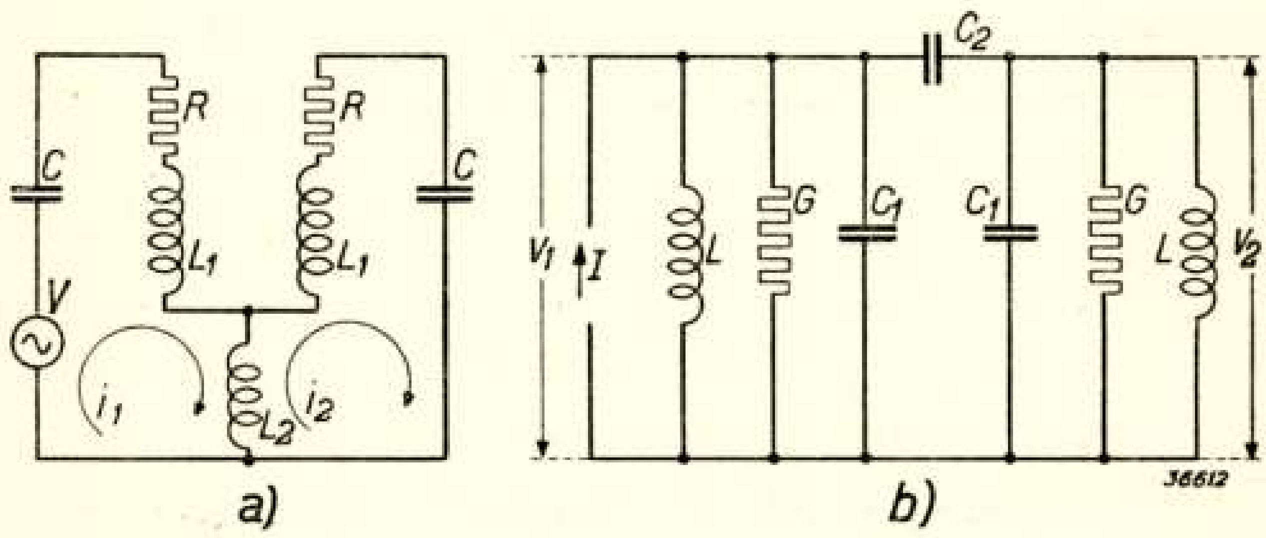
Wij zouden kunnen trachten op de bovengeschetste wijze ook voor systemen, welke op andere oppervlakken dan een bol, bijv. een torus, zijn geteekend, een duaal systeem te construeeren. Inderdaad kunnen wij zonder bezwaar in elke maas, die een zijvlak van de torus begrenst, een nieuw knooppunt aannemen en deze knooppunten, voor zoover zij binnen aangrenzende mazen liggen, door nieuwe takken verbinden en de electrische grootheden van deze nieuwe takken op dezelfde wijze uit de oorspronkelijke bepalen als boven is aangegeven. Schrijven wij nu echter voor het oorspronkelijke systeem een mazenvergelijking op behoorende bij een maas, welke het oppervlak van de torus niet in twee deelen scheidt (zie fig. 9), en gaan wij uit deze vergelijking volgens de aangegeven toevoeging de overeenkomstige vergelijking voor het „duale" systeem afleiden, dan drukt deze uit, dat de som van de stroomen, welke vloeien door de takken van het „duale" systeem, die toegevoegd zijn aan

de takken van de beschouwde maas van het oorspronkelijk systeem, nul moet zijn. Daar deze maas het torusoppervlak echter niet in twee deelen scheidt, behoeft deze som ook niet nul te zijn, waaruit blijkt, dat de beide systemen niet duaal zijn in de hier aangegeven zin, dat aan elke vergelijking voor het oorspronkelijke systeem een vergelijking voor het duale systeem beantwoordt. Dat alleen op een bol te teekenen systemen een duaal systeem bezitten, berust op de topologische eigenschap, dat de bol het eenige oppervlak is, waarop geen mazen zijn te teekenen, die het oppervlak niet in twee deelen scheiden.

Wij willen besluiten met een voorbeeld. Bevat een systeem serieschakelingen, bijv. een zelfinductie, een weerstand, een capaciteit en een spanningsbron in serie, dan moeten deze als vier takken beschouwd worden, welke dus in het duale systeem vervangen worden door een capaciteit, een geleidingsvermogen, een zelfinductie en een stroombron parallel geschakeld. Als voorbeeld beschouwen wij de in fig. 13a aangegeven trillingskringen, welke over een zelfinductie gekoppeld zijn en waarvan de eerste een spanningsbron bevat. Het duale systeem is geteekend in fig. 13b. Nemen wij in het eerste systeem twee maasstroomen i_1 en i_2 aan, dan worden de vergelijkingen voor deze mazen:

$$\left(\frac{1}{j\omega C} + R + j\omega L_1\right) i_1 + j\omega L_2 (i_1 - i_2) = V,$$

$$\left(\frac{1}{j\omega C} + R + j\omega L_1\right) i_2 + j\omega L_2 (i_2 - i_1) = 0.$$



Figuur 13.
Voorbeeld van een netwerk a), waarbij volgens het in de tekst gegeven voorschrift het duale netwerk b) is geconstrueerd.

Vervangen wij hierin de grootheden van het eerste systeem door de grootheden van het duale systeem, doordat wij, in overeenstemming met boven, C vervangen door L/K^2, L_1 door $K^2 C_1$,

L_2 door K^2C_2, R door K^2G, V door KI, i_1 door v_1/K, i_2 door v_2/K, waarin v_1 en v_2 de spanningen op de kringen van het duale systeem zijn, dan gaan bovengenoemde mazenvergelijkingen over in de volgende vergelijkingen:

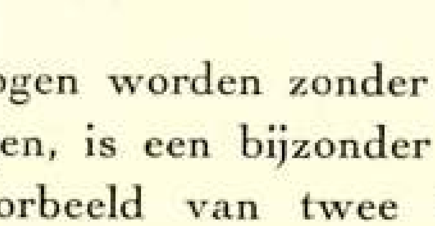
$$\left(\frac{1}{j\omega L} + G + j\omega C_1\right) v_1 + j\omega C_2 (v_1 - v_2) = I,$$

$$\left(\frac{1}{j\omega L} + G + j\omega C_1\right) v_2 + j\omega C_2 (v_2 - v_1) = 0.$$

Dit zijn inderdaad de knooppuntsvergelijkingen van het duale systeem.

Eenduidigheid der dualiteit

Het teekenen van een configuratie op een oppervlak kon soms op meer dan één wijze geschieden, zooals blijkt uit fig. 6 en fig. 7, welke elk twee wijzen aangeven, waarop de configuratie B op een torus of op een Möbius-band kan worden geteekend. Whitney (13, 14, 15, 16) heeft nu aangetoond, dat het teekenen van een planaire configuratie op een bol slechts op één wijze kan geschieden en dat daardoor een planair systeem slechts één duaal systeem bezit, indien van enkele, uit electrisch oogpunt onbelangrijke, verschillen wordt afgezien. Hebben wij nl. twee niet met elkaar samenhangende netwerken (welke nu elk ook uit twee deelen mogen bestaan, die slechts in één punt met elkaar samenhangen), waarvan het éene de knooppunten a_1 en b_1, het andere de knooppunten a_2 en b_2 bevat, dan kunnen wij deze twee netwerken tot één netwerk vereenigen door a_1 op a_2 en b_1 op b_2 te leggen, maar wij kunnen ook a_1 op b_2 en b_1 op a_2 leggen. De beide zoo gevormde netwerken zijn electrisch gelijkwaardig, daar de stroomen en spanningen van de overeenkomstige takken van beide netwerken even groot zijn. Het feit, dat twee in serie geschakelde takken verwisseld mogen worden zonder de stroomen en spanningen van het netwerk te wijzigen, is een bijzonder geval van deze electrische gelijkwaardigheid. Een voorbeeld van twee in deze zin gelijkwaardige configuraties geeft fig. 14. Maken wij geen onderscheid tusschen in bovengenoemde zin gelijkwaardige systemen, dan volgt uit de onderzoekingen van Whitney, dat een planair systeem slechts één duaal systeem bezit.



Figuur 14.
Twee configuraties, die als electrisch gelijkwaardig kunnen worden beschouwd.

Samenvatting

Twee netwerken kunnen de eigenschap hebben, dat het ééne zich wat betreft de erin vloeiende stroomen geheel analoog gedraagt als het andere wat betreft de erin heerschende spanningen. Een dergelijke „dualiteit" tusschen twee netwerken kan echter alleen bestaan, wanneer de meetkundige configuratie, volgens welke de netwerken zijn gebouwd, aan de voorwaarde voldoet, dat zij in een plat vlak geteekend kan worden zonder dat twee takken elkaar kruisen. Deze voorwaarde wordt hier, na een beschouwing over de mogelijke meetkundige configuraties van netwerken, afgeleid en met voorbeelden toegelicht.

LITERATUUR

1) W. Ahrens, Über das Gleichungssystem einer Kirchhoff'schen galvanischen Stromverzweigung, Math. Ann. **49**, 311, 1897.

2) W. Cauer, Topologische Dualitätssätze und Reziprozitätstheoreme der Schaltungstheorie, Z. angew. Math. und Mech. **14**, 349, 1934.

3) M. Dehn und P. Heegaard, Analysis Situs, Encyklopädie der math. Wiss. III AB3.

4) W. Feussner, Über Stromverzweigung in netzförmigen Leitern, Ann. d. Phys. **9**, 1304, 1902.

5) R. M. Foster, Geometrical circuits of electrical networks, Trans. A.I.E.E. **51**, 309, 1932.

6) I. N. Kagno, The mapping of graphs on surfaces, J. Math. and Phys. **16**, 46, 1937.

7) G. Kirchhoff, Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird, Pogg. Ann. d. Phys. und Chemie, **72**, 497, 1847.

8) C. Kuratowski, Sur le problème des courbes gauches en topologie, Fundamenta Math. **15**, 271, 1930.

9) F. Levi, Streckenkomplexe auf Flächen, Math. Z. **16**, 148, 1923.

10) A. Russell, Alternating Currents, 1904.

11) H. Sire de Vilar, La dualité en électrotechnique, Écl. Électr. **27**, 252, 278, **28**, 236, 1901.

12) H. Whitney, Non-separable and planar graphs, Trans. Amer. Math. Soc. **34**, 339, 1932.

13) H. Whitney, Congruent graphs and the connectivity of graphs, Amer. J. Math. **54**, 150, 1932.

14) H. Whitney, On the classification of graphs, Amer. J. Math, **55**, 236, 1933.

15) H. Whitney, 2-isomorphic graphs, Amer. J. Math. **55**, 245, 1933.

16) H. Whitney, Planar graphs, Fundamenta Math. **21**, 73, 1933.

ERRATUM

In het artikel van Ir. G. J. Siezen getiteld „Kinematische modellen van electrische relaxatieketens" komt op pag. 407 een tweetal storende fouten voor.

De formule 6) moet luiden:

$$\left[\frac{\left(\Theta\frac{d}{d\vartheta}+1\right)^n}{\frac{1}{k}\frac{a_2}{a_1}}-k\right]V_n=k\left(\frac{a_1}{a_2}-1\right)V_d$$

en de formule 9):

$$\left[(-1)^n\left(\frac{\Theta\frac{d}{d\vartheta}+1}{A}\right)^n-k\right]V_n=E$$

Piëzo-electriciteit

Symposium van de Nederlandsche Natuurkundige Vereeniging en het Nederlandsch Radio Genootschap, gehouden op Zaterdag 10 Mei 1941 in het Physisch Laboratorium der Rijks-Universiteit te Utrecht.

Symposiumcommissie:

Ir. B. D. H. Tellegen, Voorzitter; Prof. Dr. C. J. Gorter; Dr. J. M. W. Milatz; Ir. J. L. van Soest.

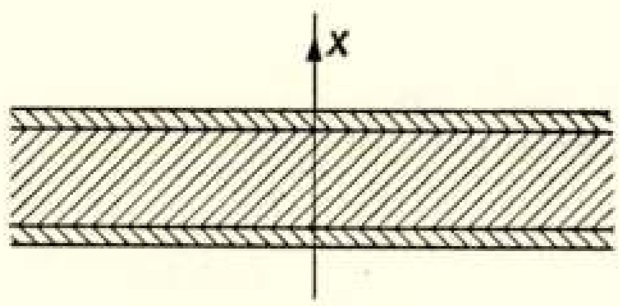
Phaenomenologie der piëzo-electriciteit

door B. D. H. Tellegen

Met piëzo-electriciteit wordt aangeduid het verschijnsel, dat bepaalde kristallen electrisch gepolariseerd worden, indien er mechanische krachten op worden uitgeoefend. Wij willen nagaan, door welke grootheden het piëzo-electrische gedrag van een stof kan worden gekenmerkt en welke vorm de vergelijkingen hebben, waardoor wij het verband tusschen de verschillende grootheden kunnen aangeven.

Éèndimensionaal geval

Beschouwen wij eerst een ééndimensionaal geval, dus een oneindig groote vlakke plaat, op welker boven- en ondervlak een



Vlakke piëzoelectrische plaat, waarvan boven- en ondervlak van dunne geleidende electroden zijn voorzien.

dunne geleidende electrode is aangebracht. Wij brengen nu een trekspanning in de x-richting aan en veronderstellen, dat de plaat de eigenschap heeft daardoor in de x-richting gepolariseerd te worden. Door de polarisatie ontstaat op het bovenvlak een positieve, zg. vrije of schijnbare lading en op het ondervlak een even groote negatieve lading. Om te voorkomen, dat hierdoor een electrische spanning tusschen de electroden zou ontstaan, welke de polarisatie zou tegenwerken, verbinden wij de electroden door een geleidende draad, sluiten deze dus kort. Daardoor zal zooveel lading van de bovenste electrode naar de onderste vloeien, dat op de electroden een ware lading ontstaat, welke gelijk en tegengesteld is aan de vrije lading van het bijbehoorende plaatoppervlak, zoodat in de plaat geen electrisch veld meer zal ontstaan.

Bestaat tusschen de polarisatie P en de trekspanning σ een lineair verband, wat doorgaans het geval is, dan kunnen wij schrijven:

$$P = q\sigma,$$

waarin q de zg. piëzo-electrische modulus is. P stelt tevens de oppervlakteladingsdichtheid op de onderste electrode voor.

De trekspanning heeft ook een rek tengevolge. Noemen wij de specifieke rek ε, dan is:

$$\varepsilon = \sigma/E,$$

waarin E de elasticiteitsmodulus is. *)

Wordt geen elastische doch een electrische spanning tusschen de electroden aangebracht, waardoor een veldsterkte F in de plaat ontstaat, dan zal eveneens polarisatie plaats hebben. Hierdoor ontstaat in de plaat een diëlectrische verplaatsing D, terwijl de electroden electrisch geladen worden. De oppervlakteladingsdichtheid op de electroden is, bij gebruik van G i o r g i-eenheden, gelijk aan de sprong in de diëlectrische verplaatsing. Daar de totale lading van het systeem nul is, is de verplaatsing in de lucht steeds nul, zoodat wij voor de ladingsdichtheid op de onderste electrode kunnen schrijven:

$$D = KF,$$

waarin K de absolute diëlectrische constante is.

De electrische spanning blijkt nu, behalve een polarisatie, ook een rek in de x-richting tengevolge te hebben. Dit is het zg. reciproke piëzo-electrische effect. Hiervoor kunnen wij schrijven:

$$\varepsilon = qF,$$

waarin q weer de piëzo-electrische modulus is. Wij zullen hieronder zien, waarom dit het geval is.

Zijn elastische en electrische spanning beide aanwezig, dan treedt superpositie op en krijgen wij:

$$D = KF + q\sigma, \quad \varepsilon = qF + \sigma/E. \tag{1}$$

D stelt ook nu de ladingsdichtheid op de onderste electrode voor.

---

*) Daar wij een ééndimensionaal geval beschouwen, veronderstellen wij, dat geen dwarscontractie plaats vindt.

De vergelijkingen (1) bevatten drie materiaalconstanten: de electrische K, de elastische E en de piëzo-electrische q, en vier toestandsgrootheden: de beide electrische F en D en de beide elastische σ en ε, waarvan wij er dus twee kunnen geven en waarbij dan de beide andere door de vergelijkingen (1) worden bepaald. Wij kunnen deze vergelijkingen nog in vele andere vormen schrijven door, in plaats van het paar D en ε in het paar F en σ uit te drukken, een willekeurig ander paar toestandsgrootheden in het overblijvende paar uit te drukken. Hierdoor zullen allerlei nieuwe coëfficiënten ontstaan, welke als nieuwe materiaalconstanten kunnen worden beschouwd, doch welke alle in de bovengebruikte drie constanten kunnen worden uitgedrukt. Zoo kunnen wij, behalve van de diëlectrische constante bij vrije plaat ($\sigma = 0$), welke in (1) voorkomt, ook spreken van de diëlectrische constante bij ingeklemde plaat ($\varepsilon = 0$). Eveneens kunnen wij, behalve van de elasticiteitsmodulus bij kortgesloten electroden ($F = 0$), welke in (1) voorkomt, ook spreken van de elasticiteitsmodulus bij open electroden ($D = 0$).

Willen wij b.v. weten, welke electrische spanning bij het aanbrengen van een trekspanning tusschen de electroden zal ontstaan, als deze open blijven, dan moeten wij in de eerste vergelijking van (1) D nul stellen. Dan wordt dus

$$F = -\frac{q\sigma}{K},$$

terwijl, wegens $D = K_0F + P = 0$, waarin K_0 de diëlectrische constante van het vacuum is,

$$P = \frac{K_0 q\sigma}{K}$$

wordt. De polarisatie is dus bij open electroden K/K_0 maal kleiner dan bij kortgesloten electroden. Dit verschijnsel komt overeen met de zg. ontmagnetiseering, welke bij het brengen van magnetische lichamen in een magnetisch veld optreedt.

Thermodynamische beschouwing

Stel, dat wij een electrische en een elastische spanning hebben aangebracht en deze nu iets gaan verhoogen. De daarbij toegevoerde electrische en elastische energie per volume-eenheid van het onvervormde lichaam is dan gelijk aan de toename van de

inwendige energie U per volume-eenheid van het onvervormde lichaam en moet dus de vorm van een totale differentiaal hebben. Met behulp van (1) kunnen wij hiervoor schrijven:

$$dU = FdD + \sigma d\varepsilon = KFdF + qFd\sigma + q\sigma dF + \frac{\sigma}{E}d\sigma =$$

$$= d\left(\frac{KF^2}{2} + qF\sigma + \frac{\sigma^2}{2E}\right),$$

waaruit blijkt, dat dit inderdaad als een totale differentiaal is te schrijven. Dit is een gevolg van het feit, dat wij de beide coëfficiënten q uit (1) aan elkaar gelijk hebben genomen, waaruit dus de noodzakelijkheid van deze gelijkheid volgt. Waren deze coëfficiënten niet gelijk, dan zouden wij door een geschikt gekozen kringproces energie kunnen winnen en zouden wij dus niet van inwendige energie kunnen spreken.

Strikt genomen is de toegevoerde electrische en elastische energie alleen dan gelijk aan de toename van de inwendige energie, indien geen warmte-uitwisseling kan plaats vinden en dus alles adiabatisch verloopt. Is dit niet het geval, zoodat nog warmte toe- of afgevoerd kan worden, dan bevat de toegevoerde energie nog een term TdS (T absolute temperatuur, S entropie). De toegevoerde electrische en elastische energie is dan dus gelijk aan $dU - TdS =$ $= d(U-TS) + SdT$. Bij isotherme veranderingen is de tweede term nul, zoodat dus ook in dit geval de toegevoerde electrische en elastische energie de vorm van een totale differentiaal, en wel de differentiaal van de zg. vrije energie $U-TS$, moet hebben en dus ook nu de beide coëfficiënten q aan elkaar gelijk moeten zijn. In het algemeen zullen de drie materiaalconstanten voor adiabatische veranderingen echter iets afwijken van de constanten voor isotherme veranderingen.

Driedimensionaal geval

Bovenstaande beschouwingen kunnen zonder meer uitgebreid worden tot het driedimensionale geval. De electrische toestand wordt dan bepaald door twee vectoren F en D, elk bepaald door drie componenten, terwijl de elastische toestand wordt bepaald door twee tensoren, de spanningstensor en de vervormingstensor, welke beide symmetrisch zijn en dus elk door zes componenten worden bepaald. Voor de spanningstensor zijn dit drie trekspan-

ningen en drie schuifspanningen, voor de vervormingstensor drie rekken en drie afschuivingen. In plaats van de twee vergelijkingen uit (1) krijgen wij nu negen vergelijkingen, welke b.v. de componenten van D en de componenten van de vervormingstensor in de componenten van F en de componenten van de spanningstensor kunnen uitdrukken. Deze negen vergelijkingen bevatten $9 \times 9 = 81$ termen, waarvan de 81 coëfficiënten materiaalconstanten van het systeem zijn. Schrijven wij de vergelijkingen in onderstaande vorm, waarin de F-componenten en de spanningscomponenten in opeenvolgende verticale rijen zijn geplaatst, dan zijn de termen te verdeelen in vier groepen, welke geheel overeenkomen met de vier termen van (1). De linkerbovengroep bevat $3 \times 3 = 9$ electrische constanten, de rechterbenedengroep bevat $6 \times 6 = 36$ elastisch

		F-componenten	spanningscomponenten
D-componenten	= = =	6 electrische constanten	18 piëzo-electrische constanten
vervormings-componenten	= = = = = =	dezelfde 18 piëzo-electrische constanten	21 elastische constanten

constanten en de rechterboven- en linkerbenedengroep bevatten elk $3 \times 6 = 18$ piëzo-electrische constanten. Op thermodynamische gronden moet de door de coëfficiënten gevormde determinant weer symmetrisch zijn, waardoor het totale aantal verschillende materiaalconstanten van 81 gereduceerd wordt tot $9 + \frac{81 - 9}{2} = 45$ en wel het aantal electrische constanten tot 6, het aantal elastische constanten tot 21, terwijl de beide groepen van 18 piëzo-electrische constanten aan elkaar gelijk zijn.

De hier afgeleide vergelijkingen gelden alleen voor het statische geval of voor langzame variaties, daar bij snelle variaties ook de massa van het kristal een rol gaat spelen.

Natuurkundig Laboratorium der N.V. Philips'
Gloeilampenfabrieken, Eindhoven/Holland.

LITERATUUR:

W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik, 1910.

Piëzo-electriciteit en kristalstruktuur

door P. Terpstra

Tot nu toe zijn er een kleine tienduizend kristalsoorten meer of minder volledig kristallografisch onderzocht. Daarvan vertoonen er naar schatting een honderdtal geenerlei symmetrie, terwijl al de anderen bepaalde symmetrie-elementen bezitten. Zeer frequent is b.v. de symmetrie, die bestaat uit de combinatie van een symmetrievlak met een daarop loodrecht staande tweetallige symmetrie-as (het snijpunt is een symmetrie-centrum). Ongeveer 50 % der onderzochte kristalsoorten behoort tot deze „klasse", die gewoonlijk wordt aangeduid door het symbool C_{2h}. Twee andere belangrijke klassen met een symmetriecentrum zijn D_{2h} en C_i. De geometrische kristallografie leert, dat er zoo in het geheel 32 kristalklassen kunnen worden onderscheiden. Daaronder zijn er 11, die een symmetriecentrum bezitten en 21, die hiervan zijn verstoken. De belangrijkste van deze 21 klassen zijn D_2 en C_{2v}, die samen 10 % der onderzochte kristalsoorten omvatten. D_2 (drie onderling loodrechte tweetallige assen) is de klasse, waartoe o.a. seignettezout behoort.

Bergkristal behoort tot de klasse D_3 (één drietallige as en loodrecht daarop drie tweetallige assen), terwijl de symmetrie van tourmalijn wordt aangeduid met het symbool C_{3v} (één drietallige as en drie symmetrievlakken, welke elkaar onder hoeken van 120° snijden langs de drietallige as).

De symmetrie-elementen van een kristal vindt men volledig terug in alle verschijnselen, die zich in dat kristal afspelen. Hieruit volgt, dat in hoogsymmetrische kristallen zich geen verschijnselen van lage symmetrie kunnen afspelen. P. Curie heeft dit uitgedrukt in zijn bekend maxime: „C'est la dissymétrie qui crée le phénomène". Een voorbeeld is de rotatie-polarisatie. Dit verschijnsel heeft geen symmetrie-centrum en kan dus niet voorkomen in een kristal, dat behoort tot één der 11 centro-symmetrische klassen. Terwijl de symmetrie van een verschijnsel nooit lager kan zijn dan die van het medium, waarin het zich afspeelt, treedt de omgekeerde verhouding, waarbij dus de symmetrie van het verschijnsel

hooger is dan die van het milieu, zeer veelvuldig op. Deze omstandigheid, dat het milieu van lager symmetrie kan zijn dan het verschijnsel, is de oorzaak van vele moeilijkheden, die we ondervinden, als we voor een bepaalde kristalsoort trachten te bepalen tot welke van de 32 kristalklassen die kristalsoort behoort. Wel is waar brengt een nauwgezet goniometrisch en mikroskopisch onderzoek ons gewoonlijk een flink eind op weg, maar meestal blijven er dan nog eenige mogelijkheden over, waaruit dikwijls op vrij willekeurige wijze een keuze wordt gedaan.

Tegenwoordig beschikken we over methodes, die dikwijls de oudere onderzoekingen op zeer gelukkige wijze kunnen aanvullen. De voornaamste daarvan zijn het piëzo-electrisch en het pyroëlectrisch onderzoek. Eigenlijk nieuw zijn deze methodes niet, want men kent de betreffende verschijnselen al lang. Aan de oude Hollandsche zeevaarders waren reeds de pyro-electrische eigenschappen bekend van de Ceylonsche tourmalijn, die zij daarom „aschtrekker" noemden en de piëzo-electrische verschijnselen werden reeds in 1880 door de gebroeders Curie ontdekt en onderzocht.

Het nieuwe aan de bedoelde moderne methodes is dat zij gemakkelijk kunnen worden toegepast op de kleine kristallen, waarmee de kristallograaf meestal heeft te maken. Voordien kon men het onderzoek op piëzo- of pyro-electriciteit alleen uitvoeren bij groote kristallen. Deze zijn evenwel zeldzaam en kunnen gewoonlijk slechts door moeizaam kweeken worden verkregen, en dan nog lang niet van alle kristalsoorten. Het heeft er nl. den schijn van alsof er inderdaad zooiets bestaat als een maximum-kristalgrootte, welke voor vele kristalsoorten slechts vrij klein is [1]).

Het beteekende daarom voor het kristallografisch onderzoek een belangrijke schrede voorwaarts, toen Giebe en Scheibe in 1925 een methode publiceerden voor qualitatief piëzo-electrisch onderzoek, die ook geschikt is voor zeer kleine kristallen. Een eerste gevolg was, dat de kristallografen zich meer gingen interesseeren voor Voigt's „Lehrbuch der Kristallphysik", een dik, moeilijk boek, dat de meesten hunner tot dien tijd rustig in hun boekenkast hadden laten staan, als zijnde „een mooi boek, maar meer geschikt voor physici, dan voor kristallografen". In dit boek heeft Voigt o.a. afgeleid, welke kristalklassen wel en welke niet piëzo-electriciteit kunnen vertoonen. Inderdaad zijn Voigt's bewijsvoeringen

niet gemakkelijk te volgen. Thans bezitten we evenwel een waardevolle inleiding in een boek van W. A. Wooster, dat in 1938 verscheen en dat heet: „A Textbook on Crystal Physics". De redeneering komt in het kort op het volgende neer. Het piëzo-electrische verschijnsel berust op het gelijktijdig aanwezig zijn van een spanningstoestand en van een electrische polarisatie, waarbij deze twee in functioneel verband met elkaar staan. De electrische polarisatie is een vectorgrootheid en wordt dus ten opzichte van een Cartesiaansch coördinatenstelsel gekenmerkt door drie componenten P_1, P_2, P_3. De spanningstoestand is een tensorgrootheid en wordt gekenmerkt door negen componenten $t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{21}, t_{22}, t_{23}, t_{31}, t_{32}, t_{33}$.

Tusschen de componenten van de vector en die van de tensor bestaat een lineair verband:

$$P_1 = q_{111}t_{11} + q_{121}t_{12} + q_{131}t_{13} + q_{211}t_{21} + q_{221}t_{22} + q_{231}t_{23} + \\ + q_{311}t_{31} + q_{321}t_{32} + q_{331}t_{33}.$$

$$P_2 = q_{112}t_{11} + q_{122}t_{12} + q_{132}t_{13} + q_{212}t_{21} + q_{222}t_{22} + q_{232}t_{23} + \\ + q_{312}t_{31} + q_{322}t_{32} + q_{332}t_{33}.$$

$$P_3 = q_{113}t_{11} + q_{123}t_{12} + q_{133}t_{13} + q_{213}t_{21} + q_{223}t_{22} + q_{233}t_{23} + \\ + q_{313}t_{31} + q_{323}t_{32} + q_{333}t_{33}$$ [2]).

De 27 grootheden q zijn de componenten van een tensor van de derde orde, welke de piëzo-electriciteit beschrijft. Hun getallenwaarde is o.a. afhankelijk van de keuze der coördinaten-assen. De bewijsvoering berust nu op een studie van de wijze, waarop de grootheden q worden getransformeerd, als men het (volgens bepaalde „kristallografische" regels gekozen) coördinatenstelsel onderwerpt aan een der symmetrie-operaties van het kristal. Een symmetrie-operatie immers voert tot een toestand, welke zich niet laat onderkennen van de uitgangstoestand. Om hieraan te kunnen voldoen, blijken nu al naar omstandigheden verschillende der grootheden q de waarde nul te moeten bezitten. Indien het kristal een symmetriecentrum bezit, is dit het geval voor alle q's; kristallen behoorende tot een der elf centro-symmetrische klassen kunnen dus geen piëzo-electriciteit vertoonen. Dit is een resultaat, waartoe men ook wel door eenvoudiger overwegingen zou hebben kunnen komen, maar niet zoo voor de hand ligt een andere conclusie uit de bewijsvoering van Voigt, nl. deze, dat ook in de klasse O (drie viertallige assen, vier drietallige assen en zes tweetallige assen),

hoewel deze geen symmetriecentrum bezit, geen piëzo-electriciteit kan optreden. In de overige 20 klassen kan piëzo-electriciteit voorkomen. Wel zijn voor de meeste klassen een aantal der grootheden q nul, maar er zijn dan toch eenige, die van nul verschillen. Men stelt nu voor ieder der 20 klassen een schema op van de grootheden q en kan daaruit direct aflezen welk soort krachten in staat zijn in het betreffende kristal piëzo-electrische ladingen te voorschijn te roepen. Zoo blijkt b.v. uit het schema, dat betrekking heeft op seignettezout, dat hierin alleen schuifkrachten piëzo-electrische uitwerking kunnen hebben.

Gaan we nog even terug naar de vijf klassen C_{2h}, D_{2h}, C_i, D_2 en C_{2v}, die samen ongeveer 80 procent der onderzochte kristallen omvatten. We zien dan, dat in C_{2h}, D_{2h} en C_i geen piëzo-electriciteit kan optreden, doordat ze een symmetrie-centrum bezitten. In D_2 en C_{2v} mag wel piëzo-electriciteit worden verwacht. Deze twee klassen nu omvatten ongeveer 10 procent van de kristallen, zoodat men mag zeggen, dat minstens één op tien kristalsoorten piëzo-electrisch is. De meesten hiervan zijn evenwel tot nu toe slechts bekend in den vorm van kleine kristallen. Een gunstige uitzondering vormen in dit opzicht o.a. bergkristal, tourmalijn, zinkblende, rietsuiker [3]), wijnsteenzuur, seignettezout, natriumchloraat. Indien de techniek nog meer verschillende soorten van groote piëzo-electrische kristallen zou noodig hebben, zou het allicht gelukken om voor een aantal geschikte kristalsoorten kweekmethodes van groote kristallen uit te werken.

Het qualitatief piëzo-electrisch onderzoek is reeds uitgevoerd bij een vrij groot aantal stoffen. Uit een overzicht van deze resultaten heeft Wooster [4]) eenige algemeene conclusies getrokken omtrent de mogelijkheid om op grond van de chemische formule eenige voorspelling te doen over het al of niet aanwezig zijn van piëzo-electriciteit. De voornaamste regels van Wooster luiden:

1. Eenvoudige zouten en zouten met hoog-symmetrische radicalen zijn niet piëzo-electrisch.
2. Zouten, die radicalen bevatten met geringe symmetrie, zijn dikwijls piëzo-electrisch.
3. Kristallen, die uit symmetrische moleculen zijn opgebouwd, zijn niet piëzo-electrisch.
4. Kristallen, die uit asymmetrische moleculen zijn opgebouwd, zijn dikwijls piëzo-electrisch.

Dit zijn empirische regels, die men vindt door de uitkomsten van het qualitatief piëzo-electrisch onderzoek te vergelijken met de chemische formule der onderzochte stoffen. Men zal nu natuurlijk trachten een stapje verder te gaan, door na te gaan of deze empirische regels min of meer kunnen worden verklaard uit de kristalstruktuur. Inderdaad gelukt dit tot zekere hoogte. Nemen we als voorbeeld de nitraten en de sulfieten. Bij deze stoffen herkennen we in de struktuur als afzonderlijke bouwsteenen resp. de groepen NO_3 en SO_3. Nu laat echter de theorie een merkwaardig verschil verwachten tusschen de vorm van NO_3' en SO_3''. Hiervoor geldt nl. een regel, die zegt: indien het totale aantal valentie-electronen net voldoende is om aan elk der zuurstofdeeltjes een octet van electronen te geven, dan is de groep „vlak", d.w.z. de middelpunten van vier samenwerkende deeltjes liggen in één vlak; is evenwel het totale aantal valentie-electronen meer dan wat noodig is om aan elk der drie zuurstofdeeltjes een octet te geven, dan is de groep „pyramidaal", d.w.z. het middelpunt van het centrale deeltje ligt buiten het vlak, waarin de middelpunten der drie zuurstofdeeltjes liggen. Bij NO_3' is het totale aantal van de valentie-electronen $5 + 6 + 6 + 6 + 1 = 3 \times 8$, terwijl dit aantal bij SO_3'' bedraagt: $6 + 6 + 6 + 6 + 2 = 3 \times 8 + 2$. Uit de genoemde regel volgt dus, dat NO_3' een vlakke configuratie bezit, terwijl deze voor SO_3'' pyramidaal is.

Nemen we als voorbeeld $MgSO_3 . 6aq$ [5]). Bij uitzondering was bij deze stof een goniometrisch onderzoek voldoende om met zekerheid de kristalklasse vast te stellen; deze is C_{3v}, d.w.z. het kristal bezit drie symmetrievlakken, die elkaar onder hoeken van 120 graden snijden langs een drietallige symmetrie-as. In deze kristalklasse is piëzo-electriciteit mogelijk en een qualitatief onderzoek wees inderdaad uit, dat deze stof sterk piëzo-electrisch is. Uit het Röntgenografisch onderzoek volgde, dat de struktuur is opgebouwd uit twee soorten van bouwsteenen, te weten ten eerste groepen $Mg . 6H_2O$ met tweevoudige positieve lading en ten tweede groepen SO_3''. De groepen $Mg . 6H_2O$ zijn hoog-symmetrisch, doordat de zes watermoleculen het Mg regelmatig omgeven, op de wijze, waarop de zes hoekpunten van een oktaeder rondom het middelpunt zijn gerangschikt. De groepen SO_3'' hebben een pyramidale vorm en bovendien staan door de geheele struktuur alle pyramides onderling evenwijdig, zoodat al deze pyramides met hun toppen

naar dezelfde kant wijzen. Stelt men zich deze toestand even voor, dan is het direct begrijpelijk, dat een druk op het kristal, welke zoo is gericht, dat deze pyramides een weinig worden samengedrukt, verplaatsingen der electronen tengevolge heeft, die zich openbaren in ladingen op het oppervlak van het kristal.

Een aardige bijzonderheid kwam voor den dag bij het onderzoek van de stof $CaHPO_4 . 2H_2O$ [6]). Deze stof vormt een hoofdbestanddeel van superphosphaat en komt overigens in de natuur voor als het mineraal brushiet. De Röntgenogrammen van brushiet zijn bijna volmaakt gelijk aan die van gips $CaSO_4 . 2H_2O$. Nu behoort gips tot de kristalklasse C_{2h}, bezit dus een symmetrie-centrum en is daardoor niet piëzo-electrisch. Er schijnt derhalve wel zeer weinig kans te bestaan op piëzo-electrische eigenschappen bij brushiet, waarvan immers volgens de Röntgenogrammen de struktuur praktisch gelijk moet zijn aan die van gips. Bovendien schrijft de theorie zoowel voor PO_4''' als voor SO_4'' een hoog-symmetrische (tetraedrische) bouw voor [7]), zoodat voor brushiet en voor gips afwezigheid van piëzo-electrische eigenschappen „begrijpelijk" schijnt. Daar men bij het Röntgenografisch onderzoek nooit iets bemerkt van de eventueel aanwezige waterstof — deze is daarvoor te licht — zal men de struktuur van brushiet als volgt mogen beschrijven: De Ca-ionen, de groepen PO_4''' en de watermoleculen liggen op dezelfde plaatsen als de overeenkomstige bouwsteenen in de gipsstruktuur; verder liggen de $H^{\cdot}$ ergens in de struktuur, om deze electro-neutraal te maken. Omtrent dat „ergens" is nog wel een plausibele onderstelling te maken. In het licht nl. van andere uitkomsten van het struktuuronderzoek laat zich verwachten, dat in elke groep PO_4''' tusschen twee der vier zuurstofdeeltjes één $H^{\cdot}$ is geschoven, zoodat we dus eigenlijk zouden moeten spreken van de groep HPO_4''. Als tusschen twee zuurstofdeeltjes een proton wordt geschoven, zal dit de zuurstofdeeltjes dicht naar zich toe trekken en dientengevolge zal de groep HPO_4'' niet meer een tetraedrische vorm hebben, maar zal deze vorm min of meer pyramidaal worden. Ziet men nu weer naar de struktuur van gips, dan blijkt er kans te bestaan, dat in de brushietstruktuur al die HPO_4''-pyramides gelijk gericht zouden zijn. In dat geval zou brushiet dus toch piëzo-electrisch kunnen zijn. En inderdaad: toen naar aanleiding van deze redeneering brushiet met de methode

van G i e b e en S c h e i b e werd onderzocht, bleek deze stof vrij sterk piëzo-electrisch te zijn.

Verdere voorbeelden van piëzo-electrische strukturen met gelijk gerichte pyramidale bouwsteenen zijn o.a. zilvernitriet, metaldehyde en trioxymethyleen.

Omtrent $MgSO_3$. 6aq valt nog op te merken, dat daarbij tweelingskristallen voorkomen, waarvan men den bouw als volgt kan beschrijven: in het tweelingkristal vormen de groepen Mg 6aq één rooster, dat zich zonder onderbreking of verandering van het eene individu in het andere voortzet; de groepen SO_3'' vormen ook een doorloopend rooster, maar de toppen der pyramides wijzen in het eene kristalindividu tegengesteld aan die in het andere individu. In een dergelijk tweelingskristal komen de piëzo-electrische eigenschappen moeilijk tot uiting, doordat de beide kristalindividuën elkaar tegenwerken. Denkt men zich nu deze tweelingsvorming verfijnd tot uiterst kleine individuën en dan voortdurend herhaald, dan ontstaat een bouwwerk, dat waarschijnlijk geen piëzo-electrische eigenschappen zal vertoonen, hoewel het wel uit piëzo-electrische brokstukjes is samengesteld. Van dergelijke verfijnde tweelingsvorming kent men in de kristallografie vele voorbeelden, de betreffende kristallen zien er uiterlijk dikwijls als volmaakte enkelvoudige kristallen uit. Men spreekt dan van mimetische kristallen. Is de mimesie tot het uiterste gedreven, dan krijgt men homogene strukturen, waarin de bouwsteenen telkens in tegengestelde standen voorkomen. Een voorbeeld hiervan biedt ons $Zn(BrO_3)_2$. 6aq, [8]) dat is opgebouwd uit hoogsymmetrische groepen Zn . 6aq en pyramidale groepen BrO_3'. De laatstgenoemde staan evenwel twee aan twee tegengesteld gericht en dientengevolge is het kristal niet piëzo-electrisch.

Bij stoffen als Mg-sulfiet komen in de struktuur polaire assen voor en daardoor kan men zich gemakkelijk een globale voorstelling maken van het mechanisme, waardoor bij druk de piëzo-electrische ladingen op het oppervlak der kristallen ontstaan.

De aanwezigheid van polaire assen is evenwel geen noodzakelijke voorwaarde voor het optreden van piëzo-electriciteit. Seignettezout is b.v. „beroemd" om zijn sterk piëzo-electrisch gedrag, terwijl seignettezout behoort tot de kristalklasse D_2, d.w.z. het bezit drie onderling loodrechte tweetallige assen, die ieder voor zich aan beide uiteinden op gelijke wijze door kristalvlakken worden omgeven, zoodat dus geen van deze assen polair is.

Van de wijze, waarop in een kristal van de klasse D_2 toch door uitwendige krachten electrische ladingen kunnen worden opgewekt, kan men een denkbeeld krijgen met behulp van het bijgaand model [9]). U ziet in het midden van de elementaire cel vier staafjes, die aan hun uiteinde telkens een witte en een zwarte bol dragen. De staafjes stellen bipolen voor; ze zijn opgesteld in overeenstemming met de symmetrie D_2. Drukt men nu het parallelopipedum diagonaalsgewijze samen, dan gaan alle witte bollen naar boven, terwijl alle zwarte bollen naar beneden gaan.

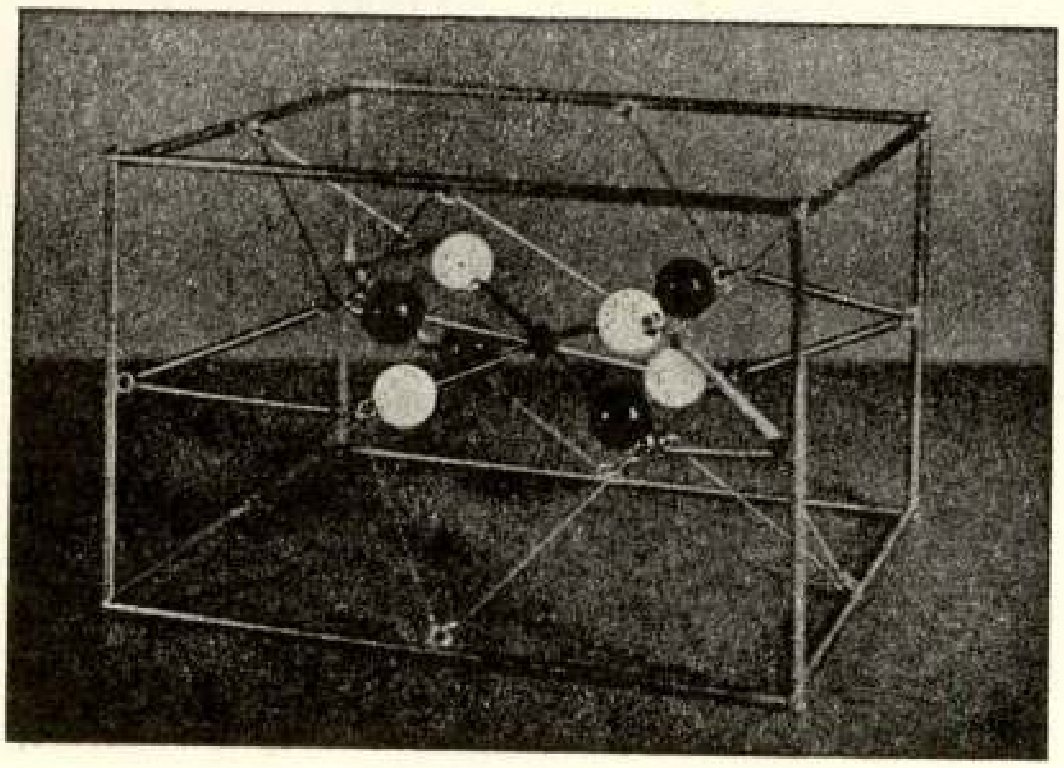


Fig. 1. Model voor piëzo-electriciteit in de kristalklasse D_2.

In het kristal zouden zoo alle positieve ladingen in de eene richting worden verschoven en de negatieve in de tegengestelde richting. Het resultaat zou zijn ladingen van gelijke grootte maar van tegengesteld teeken op boven- en benedenvlak.

Uit het schema der piëzo-electrische moduli voor de klasse D_2 blijkt inderdaad, dat men, om piëzo-electrische ladingen te voorschijn te brengen, het kristal b.v. moet samendrukken langs de bissectrice van de hoek, die wordt ingesloten door de eerste en de tweede symmetrie-as. De ladingen ontstaan dan aan de uiteinden van de derde symmetrie-as. Op overeenkomstige wijze kan men piëzo-electrische ladingen laten ontstaan aan de uiteinden van de tweede, resp. de eerste as. Steeds zijn deze ladingen veel grooter dan die, welke met evengroote drukken bij kwarts kunnen worden verkregen. De ladingen, welke optreden aan de uiteinden van de eerste as, zijn in het temperatuurgebied van —15° tot 20° zoo reusachtig groot, dat men in verband hiermee vaak spreekt van „seignette-piëzo-electriciteit".

Het is zeer merkwaardig, dat bij vervanging van $K^{\bullet}$ door $NH_4^{\bullet}$ de seignette-piëzo-electriciteit sterk terugloopt (de moduli van kaliumseignettezout en ammoniumseignettezout hebben bij 0° de waarden:

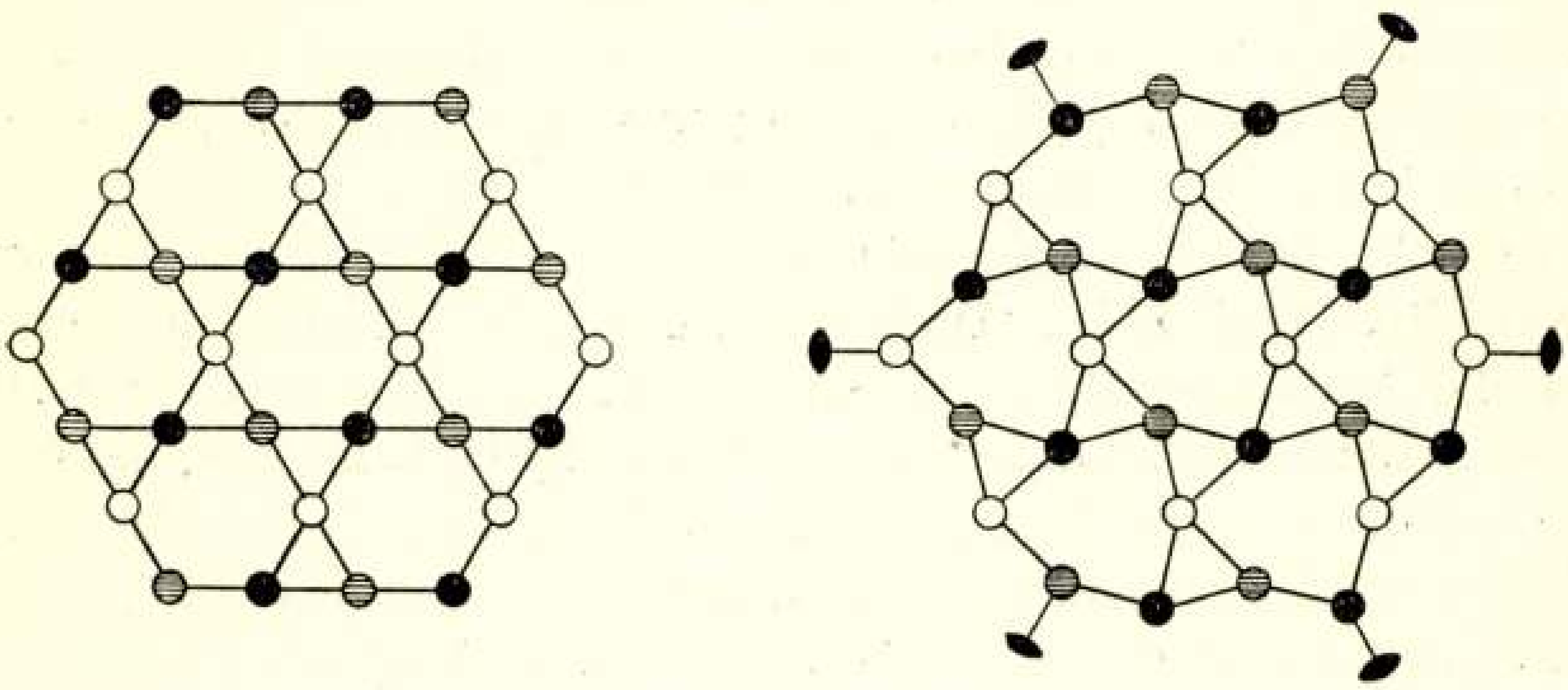
$q_{231} = 23000 \times 10^{-8}$ resp. 56×10^{-8}; $q_{132} = -138 \times 10^{-8}$ resp. -149.5×10^{-8}; $q_{123} = 28.3 \times 10^{-8}$ resp. 28.3×10^{-8}, alles uitgedrukt in electrostatische eenheden van lading per dyne [10]).)

Tenzij men wil aannemen, dat het gebied der afwijkende gedragingen bij ammoniumseignettezout naar aanzienlijk lagere temperaturen is verschoven, lijkt dit te pleiten tegen de opvatting, dat het afwijkend gedrag van kaliumseignettezout zou moeten worden toegeschreven aan het kristalwater. In dezelfde richting wijzen een reeks mededeelingen uit het Züricher natuurkundig laboratorium[11]), volgens welke de watervrije zouten KH_2PO_4 en KH_2AsO_4 ook seignette-electriciteit vertoonen. Op overeenkomstige wijze als bij seignettezout treden deze afwijkingen slechts op in een beperkt temperatuurgebied resp. beneden 115° en 91° absoluut. Naar analogie met de ferromagnetika spreekt men hier ook van „C u r i e-punten". Uit het onderzoek van H a b l ü t z e l, die met elkaar vergeleek gewoon seignettezout en „zwaar" seignettezout ($KO_2C(HCOD)_2CO_2Na \, . \, 4D_2O$) volgt, dat: „die Wasserstoffatomen für die Anomalien dieser Kristallen von bestimmenden Einflusz sind". Hoewel de kristalstruktuur van KH_2PO_4 bekend is, kunnen we daaruit geen directe aanwijzingen voor de oorzaak der seignette-elektriciteit afleiden, omdat immers het Röntgenografisch onderzoek nooit met zekerheid de plaats van de waterstofdeeltjes kan aanwijzen [12]).

We hebben reeds gezien dat daarentegen betreffende de „gewone piëzo-electriciteit" dikwijls belangrijke inzichten konden worden gewonnen uit een studie der kristalstruktuur. Kwarts is daarvan ook een voorbeeld, zij het dan ook in ietwat andere zin dan de vroeger genoemde voorbeelden. De kwartsstruktuur is in 1925 door B r a g g en G i b b s op een zeer eigenaardige wijze uit Röntgenografische onderzoekingen afgeleid. Zij maakten gebruik van het uit de mineralogie bekende feit, dat bergkristal bij 573° een overgangspunt vertoont [13]). Bij deze temperatuur heeft nl. een zeer vlotte overgang plaats van trigonale kwarts tot hexagonale kwarts en omgekeerd. De geheele overgang komt neer op een verandering van kristalsymmetrie; alle met de overgang gepaard gaande verschijnselen wijzen erop, dat de optredende veranderingen slechts kunnen bestaan uit geringe verschuivingen in de kristalstruktuur. B r a g g en G i b b s leidden nu eerst de struktuur van de hexagonale kwarts af; dank zij de hooge symmetrie kwam

deze struktuurbepaling in principe neer op het bepalen van één parameter, waarvan zij de getallenwaarde uit hun metingen konden afleiden. De trigonale kwarts eischt het bepalen van vier parameters; deze werden nu gevonden door aan de hexagonale struktuur kleine verschuivingen te geven, die de symmetrie tot trigonaal verlagen.

De meest kenmerkende eigenschap van de kwartsstruktuur is, dat elke Si tetraedrisch wordt omgeven door vier O; terwijl elk O twee Si als naaste buren heeft; (de „SiO_4-tetraeders" hangen dus aan de „hoekpunten" samen). De Si-deeltjes zijn gerangschikt op schroeflijnen, die evenwijdig aan de kristallografische hoofdas door



Kwarts boven 573°. Fig. 2. Kwarts beneden 573°.

de struktuur loopen. De bijgaande figuren stellen projecties voor van de Si-deeltjes op een vlak ⊥ de hoofdas, de verschillende hoogtes zijn op verschillende wijzen aangeduid. Uit deze figuren ziet men dat de overgang van hexagonale tot trigonale kwarts neerkomt op kleine verdraaiingen. Men stelle zich nu twee gevallen voor: 1. alle kleine verdraaiingen zijn gelijk deze in de figuur zijn aangegeven; 2. alle deze verdraaiingen zijn tegengesteld aan die, welke in de figuur zijn aangeduid. Er ontstaan zoo twee trigonale kristallen, die geheel gelijk aan elkaar zijn, alleen is hun stand in de ruimte niet gelijk: het eene kristal is ten opzichte van het andere 180° om de hoofdas verdraaid. Het laat zich nu verwachten, dat bij afkoeling beneden 573° in het eene deel van het hexagonale kristal de verdraaiingen naar rechts en in een ander deel naar links plaats hebben; het kristal gaat dan dus over in een Dauphinéer-tweeling. Verhit men omgekeerd een Dauphinéer-tweeling boven 573° dan

gaat deze over in een enkelvoudig hexagonaal kristal; dat bij afkoeling op gecompliceerde wijze weer in een tweelingsvergroeiing overgaat. Behalve door groei beneden 573° ontstaan Dauphinéertweelingen dus ook uit alle kwartskristallen, die „ééns in hun leven" boven 573° zijn geweest.

Men heeft gemeend, dat kwarts bij de 573°-overgang zijn piëzo-electrische eigenschappen geheel zou verliezen [14]), maar dit is bij een recent onderzoek door Osterberg en Cookson gebleken onjuist te zijn [15]).

Trigonale kwarts heeft twee piëzo-electrische moduli; de eene daarvan, nl. die welke betrekking heeft op krachten langs de „piëzo-electrische as" (tweetallige symmetrie-as) blijft bij verhitting tot 500° ongeveer constant en begint dan snel af te nemen om bij 573° te verdwijnen; de andere evenwel wordt bij de overgangstemperatuur niet nul.

Hexagonale kwarts heeft zoo nog slechts één piëzo-electrische modulus en zou dientengevolge voor gebruik als oscillator zekere voordeelen bieden.

Het onderzoek van Osterberg en Cookson is tevens een voorbeeld van één der twee methodes volgens welke men piëzo-electrische constantes kan bepalen. Deze onderzoekers passen de dynamische methode toe, waarbij het kristalpreparaat in trilling wordt gebracht door aan twee geschikt gekozen plaatsen van het oppervlak wisselspanningen toe te voeren [16]). De methode berust dus op een reeds door de Curie's aangegeven principe: uit thermodynamische overweging volgt, dat als het mogelijk is om door druk electrische ladingen vrij te maken, het omgekeerd ook mogelijk zal zijn door electrische ladingen vervormende krachten in het kristal op te wekken.

Een vierkant plaatje seignettezout b.v. dat loodrecht op de *a*-as is gesneden, wordt vervormd tot een ruit, als aan voor- en achterkant tegengestelde ladingen worden toegevoerd. De optredende lengteveranderingen zijn zeer gering, maar ze zijn toch goed meetbaar. Zoo vindt men b.v. voor de Röntgenreflexen goed meetbare veranderingen in de glanshoeken, waaruit volgt, dat door de aangelegde spanningen de afmetingen van het kristalrooster zijn veranderd (C. I. Vigness) [10]).

De tweede methode is de statische. Hierbij worden statische uitwendige drukken op het kristaloppervlak uitgeoefend en de daar-

door ontstane electrische ladingen gemeten. Volgens deze methode is gewerkt door de Curie's (kwarts); Valasek (seignettezout); Clay (kwarts) e.a. De quantitative uitkomsten der bepalingen van dezelfde moduli vertoonen dikwijls vrij groote verschillen: voor de moduli van trigonale kwarts loopen de uitkomsten b.v. van -6.27×10^{-8} tot -6.94×10^{-8} resp. van 1.45×10^{-8} tot 1.925×10^{-8}. Deze verschillen zijn waarschijnlijk minder aan de meetmethodes dan wel aan onvolkomenheden van het onderzochte materiaal te wijten. Bij kwarts b.v. hebben zeker tweelingsvergroeiingen groote invloed op de uitkomsten. Het is daarom zeer te betreuren, dat de onderzoekers gewoonlijk volstaan met aan te geven van welke optische firma de kristalpraeparaten zijn gekocht, zonder dat zij vermelden op welke wijze zij vóór het piëzo-electrisch onderzoek deze praeparaten op tweelingsvergroeiing, oriënteering e.d. hebben onderzocht.

Indien men zich steeds de moeite had getroost van dit „vooronderzoek" zou men waarschijnlijk tot de conclusie zijn gekomen, dat werkelijk homogene kwartsplaten tot de zeldzaamheden behooren. Kwarts heeft zeker in menig opzicht groote voordeelen, maar het wil toeschijnen, dat het ook van technisch standpunt de moeite zou loonen om onder de andere piëzo-electrische kristallen nog eens naar vervangers rond te zien. Keuze is er voldoende: bij één op de tien kristalsoorten mag piëzo-electriciteit worden verwacht.

De regels van Wooster en studie der bekende kristalstrukturen kunnen leiding geven. De kristallografie zou hierbij welvaren, doordat zij allicht, gelijk reeds vaker geschiedde, wederom door de „techniek" zou worden verrijkt met een aantal quantitatieve uitkomsten, waaraan zij thans dikwijls een beschamend tekort vertoont.

Groningen, Kristallografisch Instituut.

LITERATUUR:

1) C. Frondel, Am. Mineral. **20**, 569, (1935).

2) Algemeen in tensornotatie: $P_i = q_{kli} t_{kl}$. Zooals bekend, geldt voor de getallenwaarden van de tensorcomponenten, dat $t_{12} = t_{21}$, $t_{13} = t_{31}$ en $t_{23} = t_{32}$. Voor symmetriebeschouwingen levert het geen voordeel — eerder nadeel — op om op grond hiervan het aantal componenten van negen op zes terug te brengen.

3) B. Pavlik, Z. Krist. **100**, 414, (1939).

4) A Textbook on Crystal Physics; blz. 217.

5) H. J. Klasens, W. G. Perdok & P. Terpstra, Z. Krist. **94**, 1, (1936).

6) P. Terpstra, Z. Krist. **97**, 229, (1937).
7) Voor PO_4''' geldt: $5 + 4 \times 6 + 3 = 4 \times 8$ en voor SO_4'': $6 + 4 \times 6 + 2 = 4 \times 8$.
8) S. H. Yü & C. A. Beevers, Z. Krist. **95**, 426, (1936).
9) H. Staub, Nat. Wiss. **23**, 728, (1935).
10) J. Valasek, Science, **65**, 235, (1927).
C. Irwin Vigness, Phys. Rev. **46**, 255, (1934).
W. Mandell, Proc. Roy. Soc. **121**, 130, (1928).
De modulus q_{231} is behalve van de temperatuur ook sterk afhankelijk o.a. van de vochtigheidstoestand en van de grootte der aangewende krachten. Verder vindt men, als de waarde van q_{231} wordt afgeleid uit het omgekeerde piëzo-electrische effect, een nog veel grooter uitkomst dan de hier vermelde, welke werd afgeleid uit het directe piëzo-electrische effect (C. I. Vigness; loc. cit.).
Valasek merkt over het kaliumseignettezout nog op: „Although the crystal cut normal to the *b*-direction is much less active than one cut normal to the *a*-direction, the absence of these irregularities (fatigue, hysteresis and residual charges) and of the large temperature coefficient just above ordinary roomtemperature would make the crystal cut in this way more usefull in practical applications of the piëzo-electric effect. It is still about twenty times as active as quartz".
11) G. Busch & P. Scherrer, Nat. Wiss. **23**, 737, (1935).
G. Busch, Helv. Phys. Acta **10**, 261, (1937).
G. Busch, J. Hablützel & P. Scherrer, Helv. Phys. Acta **10**, 330, (1937).
G. Busch, Helv. Phys. Acta **11**, 269, (1938).
W. Lüdy, Helv. Phys. Acta **12**, 278, (1939).
J. Hablützel, Helv. Phys. Acta **12**, 489, (1939).
12) Hablützel vermoedt, dat z.g. „waterstofbruggen" (hydrogenbonds) een groote rol zouden spelen, doordat deze zouden leiden tot het vormen van bouwsteentjes $O \diagup^{H} \diagdown O$, welke draaibaar zouden zijn om de verbindingslijn der beide zuurstofdeeltjes. De seignette-electriciteit zou berusten op oriënteeringspolarisatie van deze bipolen $O \diagup^{H} \diagdown O$. Daarmee is in overeenstemming een waarneming van Busch, die vond, dat bij KH_2PO_4, KH_2AsO_4, $NH_4H_2PO_4$ en $NH_4H_2AsO_4$, als de temperatuur van zeer lage waarde langzaam stijgt, bij het passeeren van het „Curie-punt" de diëlectriciteitsconstante langs de *C*-as daalt van ongeveer 5000 tot ongeveer 100, maar dat tegelijkertijd de diëlectriciteitsconstante langs de *A*-as toeneemt. Dit wijst op het bestaan van bipolen, die boven het „Curie-punt" in alle richtingen wijzen, maar die, als de temperatuur beneden dat punt daalt, door een inwendig veld meerendeels worden gedraaid tot standen, waarbij zij evenwijdig aan *C*-as wijzen.
13) J. L. Rosenholtz and D. T. Smith, Am. Mineral. **26**, 109 (1941).
14) Perrier, Arch. Sci. et Phys. Nat. **41**, 493, (1916).
15) Osterberg & Cookson, J. Frankl. Inst. **220**, 361 (1935).
16) Zie b.v. ook: W. P. Mason, Phys. Rev. **55**, 775, (1939).
Mason vindt voor seignettezout: $q_{231} = 1600 \times 10^{-8}$, $q_{132} = -169 \times 10^{-8}$, $q_{123} = 39.4 \times 10^{-8}$. Het feit, dat voor q_{231} de uitkomst zoo veel kleiner is, dan de resultaten, die met de statische methode voor dezelfde constante werden gevonden wordt toegeschreven aan relaxatie.

Discussie.

Prof. Zwikker vraagt of het mogelijk is, door een kwartskristal, dat Dauphinéer tweelingen vertoont, tot 600° C te verhitten en daarna af te koelen, te komen tot een tweelingvrij kristal.

Dr. T e r p s t r a antwoord hierop: Neen. Elk kristal, dat ontstaan is uit hexagonale kwarts, is een Dauphinéer tweeling. Alleen als ze onder 573° zijn gegroeid, kunnen ze enkelvoudig zijn.

Prof. F o k k e r: Kan men Dauphinéer tweelingkristallen verbeteren door langdurige verhitting *beneden* 573°, zoodat de groote kristalgebieden aangroeien ten koste van de kleinere kristalgebieden?

T.: Waarschijnlijk zal dit verschijnsel niet optreden; in de natuur zijn de meeste kwartskristallen gedurende of na hun vorming reeds langdurig aan hooge temperaturen blootgesteld geweest.

Prof. V e n i n g M e i n e s z: Zijn dan niet alle kwartsen in de natuur voorkomend tweelingen?

T.: Inderdaad zijn groote enkelvoudige kristallen uiterst zeldzaam.

Prof. G o r t e r: Hoe staan de symmetrieën van het piëzo-electrische verschijnsel en dat van de rotatie-polarisatie ten opzichte van elkaar? Zijn er kristallen, die wel het polarisatievlak draaien, doch niet piëzo-electrisch zijn?

T.: Rotatie-polarisatie kan voorkomen in alle 21 a-centrische kristalklassen; piëzo-electriciteit kan, met uitzondering van de klasse *O*, voorkomen in dezelfde klassen. Een merkwaardig voorbeeld wordt gegeven door de kristallen van tricyclohexaandiamine 1,2 cobaltijodide; deze zijn kubisch, ze draaien het polarisatievlak, maar ze zijn niet piëzo-electrisch. Deze kristallen behooren "derhalve" tot de klasse *O*.

Omtrent de rotatie-polarisatie kan hieraan nog worden toegevoegd, dat de kristalsoorten, waarbij men dit verschijnsel werkelijk heeft gevonden, alle behooren tot één der elf "holoaxiale" klassen: C_1, C_2, C_3, C_4, C_6, D_2, D_3, D_4, D_6, T en O. In geen der overige tien klassen (de a-centrische klassen, welker symmetrie in verband staat met spiegelingen) is tot nu toe draaiend vermogen aangetoond.

Vervaardiging van kwartskristallen voor technische doeleinden

door J. J. Vormer

Mededeeling uit het Radiolaboratorium van de P.T.T., 's-Gravenhage.

Inleiding.

Piëzo-electrische kristallen worden tegenwoordig in de techniek veelvuldig toegepast. In hoofdzaak komen drie materialen voor de vervaardiging van piëzo-electrische lichamen in aanmerking, nl. kwarts, toermalijn en Rochelle-zout. Welke van deze drie piëzo-electrische materialen men in een bepaald geval zal kiezen, hangt af van het doel, waarvoor het piëzo-electrische element gebruikt moet worden.

Voor ultra-acoustische doeleinden, in electrische filters en voor kristalpreparaten, die moeten dienen om de frequentie van een generator te stabiliseeren, gebruikt men kwarts, aangezien deze stof de voor deze doeleinden noodzakelijke piëzo-electrische en elastische eigenschappen bezit. Kwarts is een natuurproduct, maar het komt betrekkelijk veel voor, ook in vrij groote stukken, zoodat de prijs redelijk is.

Toermalijn wordt soms gebruikt bij generatorkristallen voor zeer hooge frequenties; het bezit eveneens gunstige piëzo-electrische en elastische eigenschappen. Ook dit materiaal is een natuurproduct; het is echter veel zeldzamer dan kwarts, zoodat in het bijzonder eenigszins groote stukken kostbaar zijn.

Rochelle-zout, ook wel genoemd Seignette-zout, wordt vooral toegepast voor de vervaardiging van preparaten, die gebruikt worden voor de omzetting van geluidstrillingen in electrische trillingen, zooals kristalmicrofoons, gramofoon-opnemers, e.d. Het is hiervoor bijzonder geschikt, aangezien bij deze stof het piëzo-electrische effect vele malen grooter is dan bij de hiervoor vermelde materialen. Men kan kristallen van Rochelle-zout op eenvoudige wijze kunstmatig verkrijgen, zoodat het materiaal goed-

koop is. De mechanische eigenschappen van Rochelle-zout zijn echter zeer veel ongunstiger dan die van kwarts of toermalijn.

Teneinde het onderwerp eenigszins te beperken, zal in het hiernavolgende uitsluitend gesproken worden over kristalplaten of -staven van kwarts, zooals die in electrische filters en voor frequentiestabilisatie van generatoren gebruikt worden. In deze gevallen bevindt het kwartselement zich in trilling. Dergelijke trillende kwartskristallen worden o.a. toegepast in radiozenders en -ontvangers, bij draaggolftelefonie over leidingen en als frequentiestandaard.

De laatste toepassing is in technisch-wetenschappelijk opzicht de belangrijkste, omdat men aan een standaard-frequentie buitengewoon hooge eischen stelt. Is men in staat aan de eischen voor een standaard-kristal te voldoen, dan zal men zeker kristalplaten voor de meer gewone technische toepassingen kunnen vervaardigen, tenminste wanneer de frequenties daarvan van dezelfde orde van grootte zijn als de meest gebruikte standaard-frequentie, d.i. 100 kHz.

Evenwel dient men er rekening mede te houden, dat men aan de vervaardiging van een kristal voor een frequentie-standaard veel tijd en geld kan besteden, terwijl voor een meer commercieel doel een eenvoudige vervaardigingsmethode en geringe kosten veelal doorslaggevend zijn.

Eischen, die aan moderne generator-kristallen gesteld worden.

Aanvankelijk stelde men aan kristallen, die gebruikt werden voor frequentie-stabilisatie, eischen, die gerekend naar den tegenwoordigen maatstaf volstrekt niet hoog waren. De reden hiervan is ongetwijfeld geweest, dat men, door het opnemen in een generatorschakeling van een piëzo-electrisch element, op zichzelf reeds een zeer groote verbetering in de frequentie-constantheid bereikte. Dit hangt samen met het kleine decrement van het kristal.

Hoe zich een trillend piëzo-electrisch kristal in een generatorschakeling gedraagt, zal door Prof. Z w i k k e r nader verklaard worden. Volstaan zij hier met op te merken dat, wat de eigenschappen in de schakeling betreft, men een kristal, waarbij de electroden direct op het kwarts zijn aangebracht, vervangen mag denken door den in fig. 1 geteekenden afgestemden kring. Deze

kring is de eenige afgestemde kring in de generatorschakeling.

De in fig. 1 geteekende schakeling bezit twee resonantie-frequenties, de zgn. serie- en de zgn. parallel-resonantie-frequentie. Zoowel de eerste als de tweede frequentie kan men in den generator opwekken; welke frequentie in een bepaald geval verkregen wordt hangt af van de toegepaste schakeling.

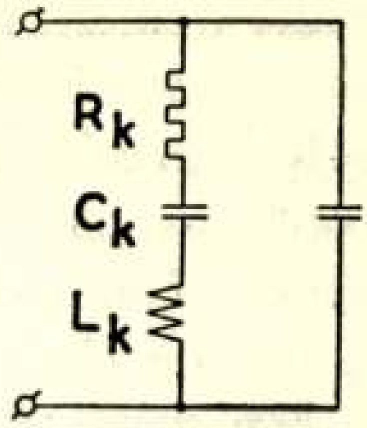


Fig. 1. Vervangingsschema van een trillend kwartskristal.

Nu kan men in het algemeen zeggen, dat de eigenfrequentie van een generator des te meer zal overeenkomen met de resonantiefrequentie van den in de generatorschakeling opgenomen kring en derhalve onafhankelijker zal zijn van allerlei invloeden van buiten, naarmate het decrement van den kring kleiner is. Aangezien het decrement, zelfs van een matig kwartskristal, steeds een orde beter is dan van een afgestemden kring, was de verbetering, die men bereikte door den kring door een kristal te vervangen, niet gering [1]).

Heeft men eenmaal een generatortype, waarbij de frequentie voornamelijk afhangt van de eigenschappen van het daarin geplaatste piëzo-electrische element, dan is het logisch, dat men er naar zal streven dit onderdeel zoo goed mogelijk te maken. De eischen, aan een generatorkristal gesteld, zijn dan ook in den loop der tijd voortdurend hooger geworden.

Aanvankelijk was de afwezigheid van nevenfrequenties — dat zijn eigenfrequenties in de onmiddellijke omgeving van de gewenschte eigenfrequentie — de voornaamste eisch, doch tegenwoordig wenscht men van een goed generatorkristal bovendien:

1e. dat de frequentie onafhankelijk is van de temperatuur;

2e. dat de frequentie onafhankelijk is van den luchtdruk.

Bovendien kan men, door het kristal in een speciale schakeling op te nemen [2]) bereiken, dat veranderingen van de voedingsspanningen een uiterst geringen invloed op de generatorfrequentie hebben. Het is daarbij van belang:

3e. dat de demping zoo gering mogelijk is;

---

1) Teneinde een indruk te geven van de grootte-orden zij vermeld, dat een goede kring van 100 kHz een kwaliteitsfactor $Q = \omega L_k / R_k$ bezit van ongeveer 300, terwijl deze factor bij een goed kristal 100.000 of meer bedraagt.

2) "The bridge-stabilised oscillator" L. A. Meacham, Proc. I.R.E. 1928 p. 1278.

4e. dat de grootheden van het electrische vervangingsschema bepaalde waarden bezitten.

Verder wenscht men, in het bijzonder bij frequentie-standaarden, dat de frequentie van den kristalgenerator zeer nauwkeurig op een bepaalde waarde ingesteld kan worden. Aangezien men deze generatorfrequentie slechts op geringe wijze electrisch kan beinvloeden, houdt deze laatste eisch in:

5e. dat de eigen-frequentie van het kristal zeer nauwkeurig een bepaalde waarde moet hebben.

De afwezigheid van nevenfrequenties is niet slechts van belang voor generatorkristallen, maar voor alle toepassingen waarbij van trillende kwartslichamen gebruik wordt gemaakt.

Van de verdere hiervoor genoemde eischen heeft de eerste aanleiding gegeven tot de ontwikkeling van de zg. temperatuur-onafhankelijke sneden; de tweede en derde eisch hebben geleid tot de ontwikkeling van speciale kristalhouders, terwijl de vierde en vijfde eisch direct samenhangen met de afmetingen van het kristal.

Achtereenvolgens zal nu nagegaan worden, hoe aan de verschillende eischen kan worden voldaan. In afwijking van den historischen ontwikkelingsgang zal de kwestie van de nevenfrequenties daarbij behandeld worden na de temperatuur-onafhankelijke sneden.

Temperatuur-onafhankelijke sneden.

Men heeft op verschillende wijzen getracht kwartsplaten of -staven te maken, waarvan één van de eigen-frequenties, althans binnen een beperkt temperatuurgebied, onafhankelijk is van de temperatuur.

Bij de eerste pogingen op dit gebied [1]) maakte men gebruik van het inzicht, dat een kwartsplaat of -staaf op verschillende wijzen kan trillen, dat deze trillingen elastisch met elkaar gekoppeld zijn en dat ze soms tegengestelde temperatuur-coëfficiënt hebben. Door regeling van de frequentie van elk der trillingen kan men bereiken, dat in een bepaald gebied de temperatuur-coëfficiënt door nul gaat.

---

1) "A high precision standard of frequency" W. A. Marrison, Proc. I.R.E. 1929 p. 1103.

"Observation on modes of vibration and temperature-coëfficients of quartz crystal plates" F. R. Lack, Proc. I.R.E. 1929 p. 1123.

Dit soort kristallen is toegepast in frequentie-standaarden. Zij zijn echter buitengewoon lastig af te regelen, terwijl ook de ondersteuning moeilijkheden oplevert. Voor toepassing in zenders e.d. zijn ze weinig of niet gebruikt.

Een tweede wijze waarop temperatuur-onafhankelijkheid verkregen kan worden is de toepassing van lange staven. Een lange staaf heeft op zichzelf reeds een vrij geringe temperatuur-coëfficiënt, welke nog verkleind kan worden door een juiste keuze van de oriënteering en van de verhouding van de afmetingen [1]). Het gebruik in zenders van dit soort kristallen wordt beperkt door het feit, dat lange staven bij voorkeur voor vrij lage frequenties gebruikt worden. Bovendien is een staaf weinig geschikt als generatorkristal; platen voldoen in dit opzicht veel beter.

De moderne temperatuur-onafhankelijke generatorkristallen zijn dan ook kwartsplaten. Volledige temperatuur-onafhankelijkheid kan bij deze platen bereikt worden, door ze op een bepaalde wijze uit het kristal te snijden.

Fig. 2 geeft weer een links- en een rechtsdraaiend kristal; in deze figuur is tevens de richting en richtingszin van de assen aangegeven.

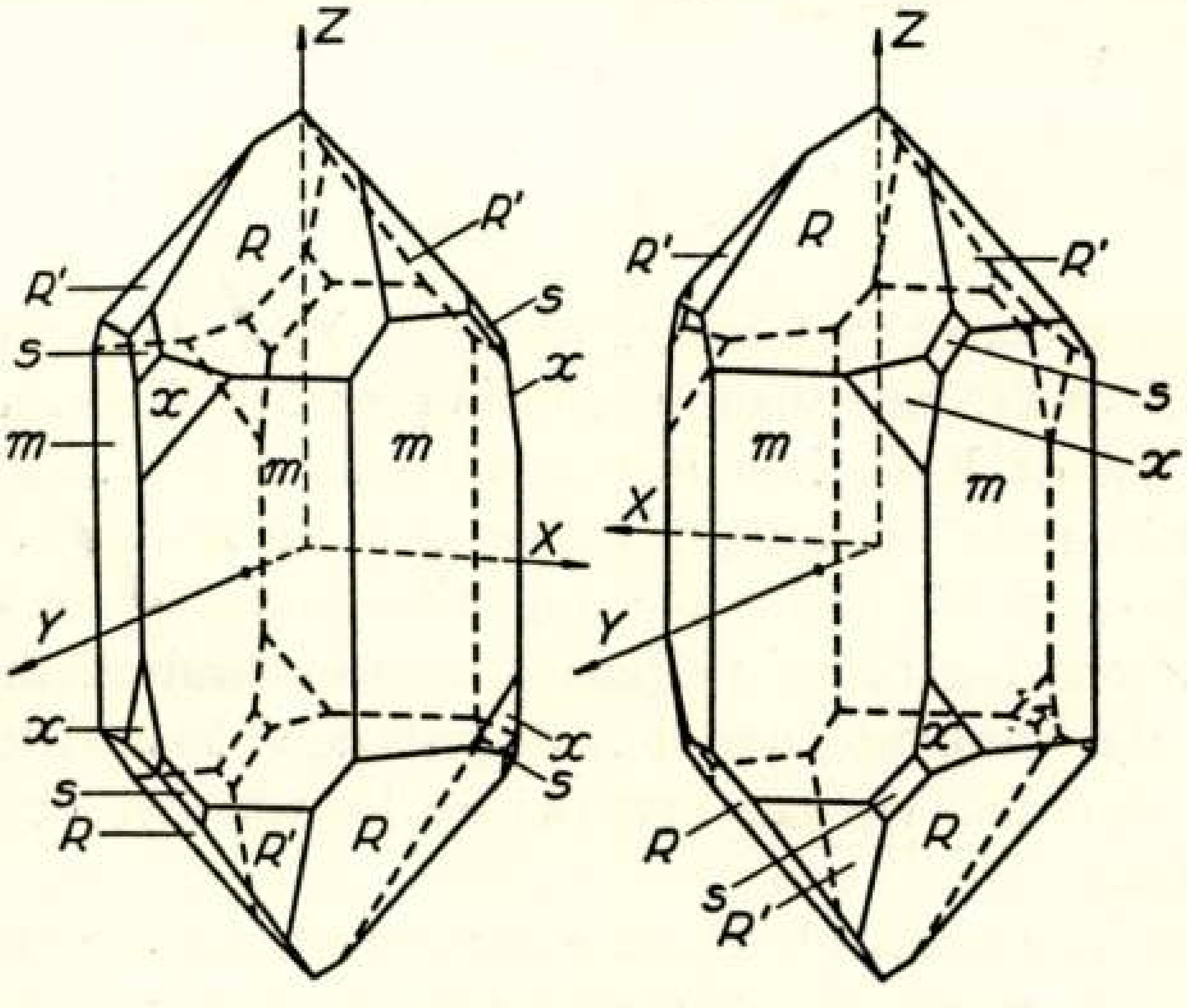


Fig. 2. Links- en rechtsdraaiend kwarts.

1) "Electrical wave filters employing quartz crystals as elements" W. P. Mason, Bell Syst. Techn. Journ. 1934 p. 405.

"On the temperature-coëfficients of frequency of Y-waves in X-cut quartz plates" Matsumara and Kansaki, Report of radio researches and works in Japan. 1932 p. 35.

Een plaatje, waarvan het grootste vlak loodrecht op de X-as staat, wordt X-snede genoemd. X-sneden worden o.a. gebruikt voor ultra-acoustische doeleinden, waarbij men van de longitudinale trilling in de X-richting gebruik maakt. De groote vlakken zijn trillingsbuiken, terwijl de dikte overeenkomt met een halve golflengte. De vorm, die het plaatje bij deze dikte-trilling aanneemt, is in fig. 3*a* weergegeven.

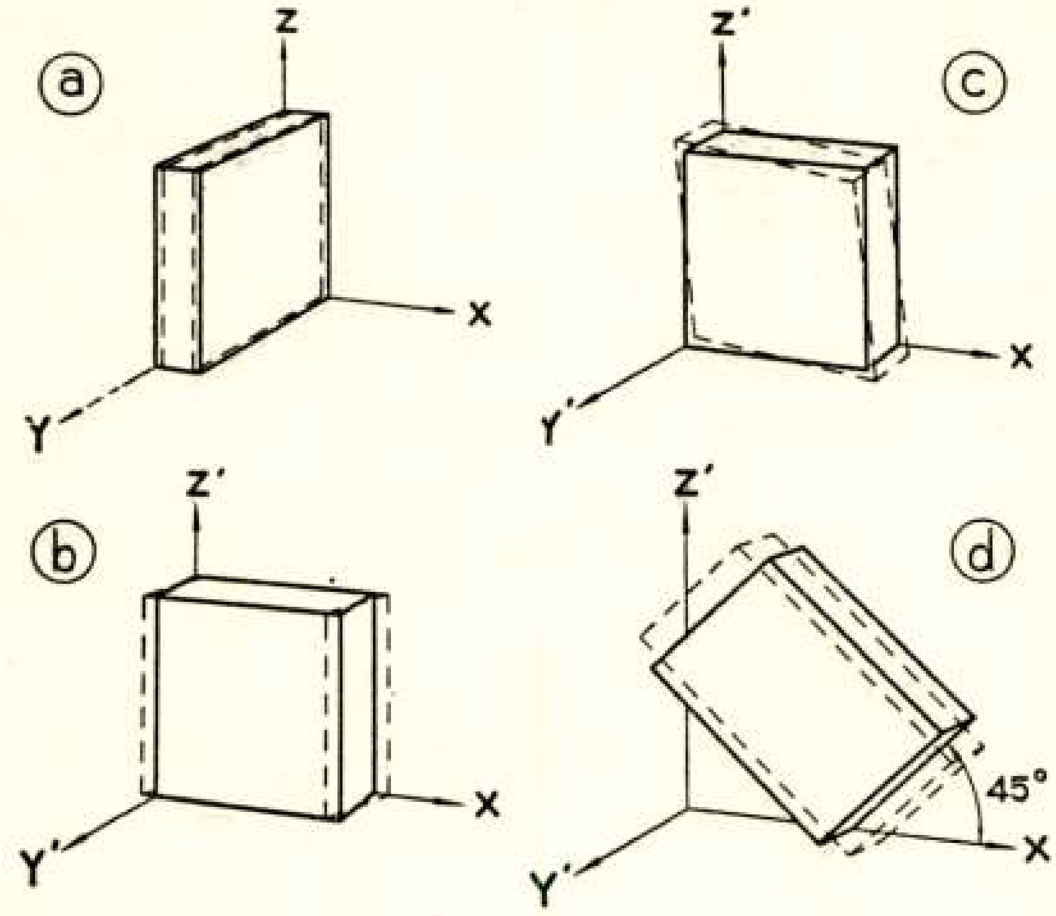


Fig. 3. Trillingswijzen: *a. X-snede, b. AT- en BT-snede, c. CT- en DT-snede, d. GT-snede.*

Staat het grootste vlak loodrecht op de Y-as, dan spreekt men van een Y-snede. Een snede evenwijdig aan de X-as, maar niet loodrecht op de Y-as, kan men opvatten als een ,,om de X-as gedraaide Y-snede'', waarbij de nieuwe Z-as als Z'-as en de nieuwe Y-as als Y'-as wordt aangeduid. Fig. 4 verduidelijkt een en ander.

De door ons het meest toegepaste temperatuur-onafhankelijke kristallen zijn vierkante, om de X-as gedraaide Y-sneden, waarbij de zijden van het vierkant evenwijdig loopen met de Z'-as en met de X-as.

Een dergelijke gedraaide Y-snede kan een schuiftrilling uitvoeren, waarvan de frequentie in hoofdzaak door de dikte wordt bepaald. De vorm, die het kristal daarbij aanneemt, is in fig. 3*b* weergegeven. De temperatuur-coëfficiënt van de schuiftrilling blijkt af te hangen van den hoek φ uit fig. 4 en wel gaat de temperatuur-coëfficiënt door nul voor $\varphi \approx 35^\circ$ en $\varphi \approx -49^\circ$.

Men noemt de bij deze speciale hoeken behoorende gedraaide *Y*-sneden resp. *AT*- en *BT*-snede. Beide hebben gunstige piëzo-electrische eigenschappen, terwijl in het bijzonder de *AT*-snede weinig hinder heeft van neven-frequenties. Aangezien de eigenfrequentie van deze platen, zooals reeds vermeld is, door de dikteafmeting bepaald wordt en de lengte en breedte groot moeten zijn t.o.v. de dikte, zijn *AT*- en *BT*-sneden bijzonder geschikt voor hooge frequenties (boven 300 kHz).

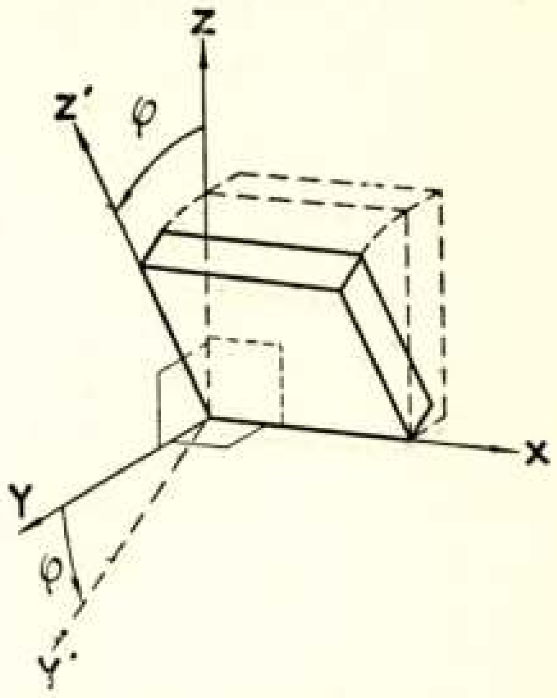


Fig. 4. Oriëntatie van een om de *X*-as gedraaide *Y*-snede.

Men kan *AT*- en *BT*-sneden in een oneven harmonische van de dikte-frequentie laten trillen; zoodoende kunnen zelfs zeer hooge frequenties gestabiliseerd worden. Ook voor deze harmonische schuiftrillingen is de temperatuur-coëfficiënt nul.

Voor lagere frequenties (beneden 300 kHz) zijn *AT*- en *BT*-sneden niet geschikt; ze worden dan te dik in verhouding tot de lengte en de breedte. Men gebruikt voor dit frequentiegebied andere om de *X*-as gedraaide *Y*-sneden, die resp. genoemd worden *CT*- en *DT*-snede. Dit zijn eveneens vierkante platen, die een schuiftrilling uitvoeren. Ze onderscheiden zich van de hiervoor behandelde doordat:

1e. de frequentie niet bepaald wordt door de dikte-, maar door de breedte-afmeting, en

2e. doordat het groote vlak van de *DT*- resp. *CT*-snede ongeveer loodrecht staat op dat van de *AT*- resp. *BT*-snede. Bij de *CT*-snede is de hoek φ van het groote vlak met de *Z*-as $\approx 37°$, bij de *DT*-snede $\approx - 52°$.

De vorm die de *CT*- en de *DT*-snede bij trilling aanneemt is afgebeeld in fig. 3*c*.

Een bijkomstig voordeel van de laatstgenoemde sneden is, dat men van een plaatje, dat ongeveer de juiste eigenschappen heeft, de temperatuur-coëfficiënt met een klein positief of negatief bedrag kan veranderen, terwijl men, vrijwel onafhankelijk daarvan, de frequentie zoowel hooger als lager kan maken.

Behalve de hiervoor beschreven temperatuur-onafhankelijke

kwartsplaten, kan men nog allerlei andere temperatuur-onafhankelijke sneden bedenken [1]). Zoo is het b.v. niet noodzakelijk de kristalplaten vierkant te maken. De vierkante vorm heeft echter in het algemeen minder neven-frequenties. Een andere mogelijkheid is het plaatje, behalve om de X-as, tevens om de Z'-as te draaien. Er zijn zoodoende heele series kristallen met temperatuurcoëfficiënt nul mogelijk, die ten deele ook gunstige piëzo-electrische eigenschappen hebben, maar die toch weinig toegepast zijn, omdat de vervaardiging moeilijk is.

Hier komt nog bij, dat alle tot nu toe besproken kwartsplaten een eigenschap hebben, die soms minder gewenscht is, nl. dat de temperatuur-coëfficiënt feitelijk maar voor één bepaalde waarde van de temperatuur nul is, zoodat de frequentie van den generator, waarin de plaat gebruikt is, slechts voor kleine afwijkingen van deze nominale temperatuur constant blijft.

Het frequentieverloop als functie van de temperatuur is bij de hiervoor besproken kristallen ongeveer als aangegeven in fig. 5.

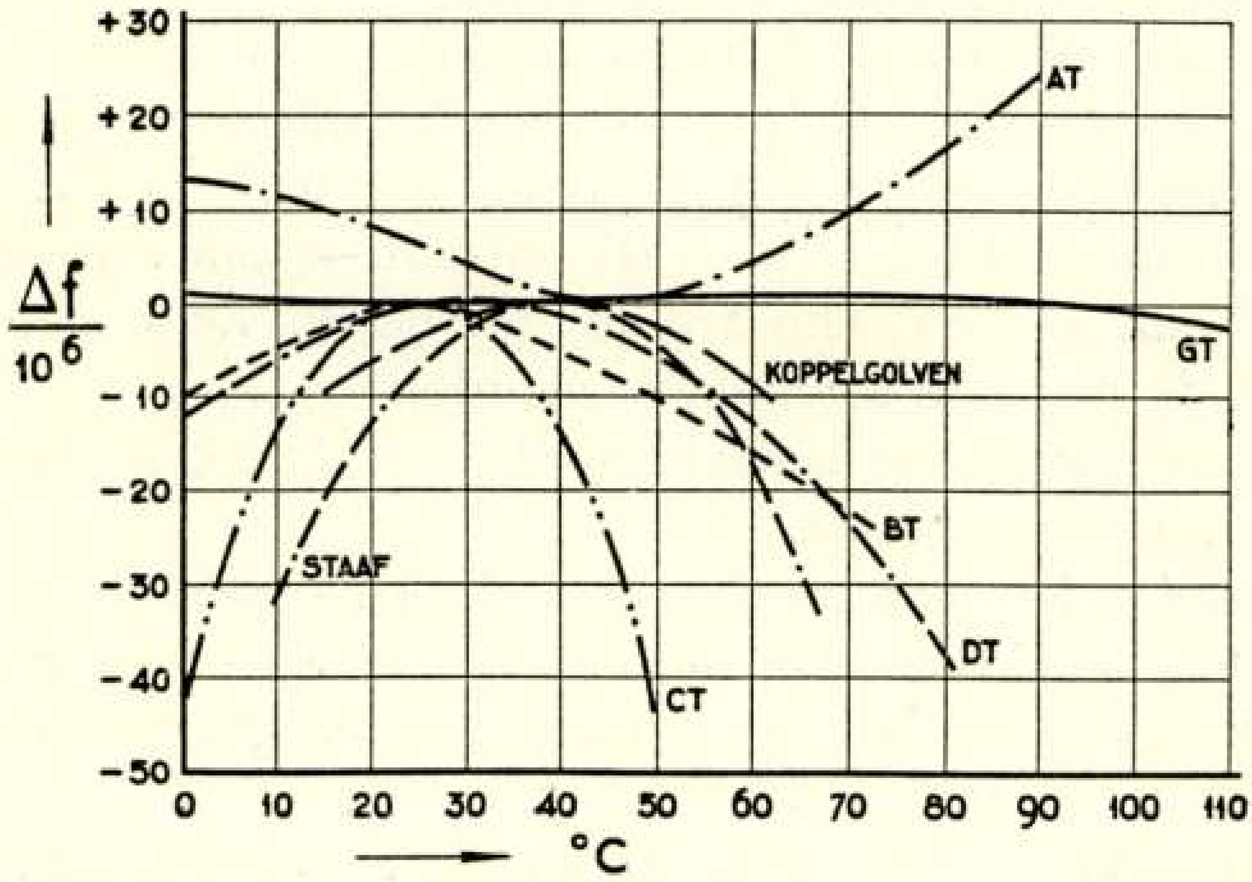


Fig. 5. Relatieve frequentie-verandering als functie van de temperatuur voor verschillende sneden.

Men ziet hieruit, dat een werkelijk zeer kleine temperatuur-coëfficiënt, b.v. $1.10^{-6}/°C$, feitelijk maar binnen een temperatuur-interval van eenige graden Celcius geldt. In het algemeen hebben alle geteekende krommen in de buurt van de temperatuur, waarbij de

1) "Low temperature-coëfficient quartz crystals" W. P. Mason, Bell Syst. Techn. Journ. 1940 p. 74.

temperatuur-coëfficiënt nul is, een parabolisch verloop, iets wat ook theoretisch te verwachten is.

Men heeft nu gezocht naar een kristal, waarbij de frequentie over een grooter temperatuurgebied constant is; het resultaat is geweest de zg. *GT*-snede. Dit is, evenals de hiervoor beschreven temperatuur-onafhankelijke kristallen, een om de *X*-as gedraaide *Y*-snede. De plaat heeft echter een rechthoekigen vorm, terwijl de zijden hoeken van 45° maken met de *X*- en de *Z'*-as. Bovendien heeft de verhouding van de zijden een zeer speciale waarde, die samenhangt met den hoek φ uit fig. 4, waarover de plaat gewenteld is. Men gebruikt de trilling, waarvan de frequentie bepaald wordt door de breedte. De vorm, die de plaat bij trilling aanneemt, is afgebeeld in fig. 3*d*.

Men kan op deze wijze weer een heele serie temperatuur-onafhankelijke kristallen ontwerpen. Bijzonder gunstig wordt de temperatuur-onafhankelijkheid wanneer men $\varphi \approx 51°30'$, en de verhouding van de zijden $\approx 0{,}855$ neemt; de frequentie blijft dan over een gebied van ongeveer 100°C practisch constant. Het verband tusschen frequentie en temperatuur wordt thans voorgesteld door een derdegraads-kromme; wanneer men een gunstig temperatuurgebied uitkiest, verandert daarbinnen de frequentie bij 15°C temperatuur-variatie niet meer dan 1 deel op 10^7 (zie fig. 5 *GT*).

Deze zeer kleine temperatuur-coëfficiënt maakt de *GT*-snede bijzonder geschikt voor toepassing in frequentie-standaarden. Voor commercieele doeleinden blijven de hiervoor genoemde *CT*- en *DT*-sneden evenwel hun waarde behouden. Een nadeel van de *GT*-snede is nl. dat de vervaardiging lastiger is dan van de *CT*- en *DT*-sneden, terwijl bovendien voor eenzelfde frequentie de afmetingen bij de *GT*-snede belangrijk grooter worden.

Nevenfrequenties.

Zooals reeds vermeld, kan in het algemeen een kwartsstaaf of kwartsplaat op een aantal manieren en in een groot aantal frequenties trillen. Men kan opwekken longitudinale trillingen, schuiftrillingen, buigtrillingen en torsietrillingen; bovendien kan men voor elke wijze van trillen de grondgolf opwekken of harmonischen daarvan. Welke frequentie in een bepaald geval in een generatorschakeling ontstaat, hangt af van de schakeling en van de wijze waarop de electroden op het kristal aangebracht zijn.

Dat een kwartslichaam vele eigen-frequenties bezit is derhalve niets bijzonders en meestal ook niet hinderlijk, aangezien deze frequenties in het algemeen ver uit elkaar liggen. Hinderlijk evenwel zijn zg. neven-frequenties, dat zijn eigen-frequenties, die zeer dicht bij de gewenschte eigen-frequentie liggen. Dergelijke neven-frequenties kunnen veroorzaakt worden door minderwaardigheid van het gebruikte kwarts, veelal zijn het echter koppelverschijnselen.

De hiervoor besproken moderne temperatuur-onafhankelijke sneden zijn alle om de X-as gedraaide Y-sneden, waarbij het electrische wisselveld in de Y'-richting verloopt. Bij de AT- en BT-snede gebruikt men de schuiftrilling, waarvan de frequentie bepaald wordt door de dikte-afmeting; bij de CT- en DT-snede de schuiftrilling, waarvan de frequentie bepaald wordt door de breedte-afmeting. In principe kan echter iedere al of niet gedraaide Y-plaat op beide wijzen trillen. Deze twee trillingswijzen zijn elastisch met elkaar gekoppeld. Bij bepaalde breedte-afmetingen heeft een harmonische van de breedte-trilling dezelfde frequentie als de dikte-trilling. In dat geval bezit het systeem twee dicht bijeenliggende eigenfrequenties, juist zooals twee gekoppelde kringen, die op dezelfde frequentie afgestemd zijn.

Het ligt voor de hand te trachten het euvel te verhelpen door de breedte-afmeting zoover af te slijpen, dat de harmonische van de breedte-frequentie niet meer samenvalt met de dikte-frequentie. In het algemeen verandert men dan evenwel tevens de dikte-frequentie, juist doordat de trillingen gekoppeld zijn.

Bij bepaalde waarden van den hoek φ uit fig. 4 is evenwel de koppeling tusschen de beide genoemde trillingswijzen nul, nl. voor $\varphi \approx 31^\circ$ en voor $\varphi \approx -58^\circ$.

In het voorgaande is vermeld, dat de temperatuur-coëfficiënt nul wordt voor $\varphi \approx 35^\circ$ en voor $\varphi \approx -49^\circ$, resp. de AT- en de BT-snede. Eén van de hoeken, waarbij de koppeling nul wordt, ligt derhalve zeer dicht bij de AT-snede of, wat op hetzelfde neerkomt, bij de AT-snede is de koppeling klein. Bij de AT-snede is het daarom wel mogelijk de breedte-afmeting te veranderen, zonder dat daarbij de dikte-frequentie noemenswaard beïnvloed wordt [1]).

Een extra voordeel van kristallen met geringe elastische koppe-

1) Behalve door koppeling, kan de ongewenschte breedte-trilling ook direct piëzo-electrisch opgewekt worden. Het feit dat voor $\varphi \approx 31^\circ$ de koppeling nul wordt, wil derhalve nog niet zeggen, dat geen nevenfrequenties aanwezig zijn. Men kan de frequentie van deze breedte-trilling echter een willekeurige waarde geven, zoodat deze niet storend is.

ling tusschen de trillingswijzen is, dat ze zwaarder belast kunnen worden, dan kristallen, waarbij wel koppeling aanwezig is.

Kristalhouder.

Hoewel dit onderwerp strikt genomen niet tot de eigenlijke kristalfabricage behoort, lijkt bespreking op deze plaats aangewezen, aangezien de eigenschappen van het piëzo-electrische element in sterke mate beïnvloed worden door de wijze van opstelling.

Aan den hiervoor genoemden tweeden eisch, dat de frequentie onafhankelijk moet zijn van den luchtdruk, kan feitelijk alleen behoorlijk voldaan worden door het kristal in vacuum op te stellen.

Men komt dan tevens gedeeltelijk tegemoet aan den derden eisch, dat de demping klein moet zijn. Een aanzienlijk gedeelte van de demping van het kristal wordt nl. gevormd door de luchtdemping. Men kan deze weliswaar gedeeltelijk opheffen door de daarvoor in aanmerking komende luchtkolommen af te stemmen, maar dit geldt exact slechts voor één temperatuur en één barometerstand. Bovendien zijn frequentie en demping van een in lucht opgesteld kristal vrij sterk afhankelijk van vochtigheid. Door opstelling in vacuum worden de hierboven genoemde moeilijkheden afdoende overwonnen.

Bij de door ons vervaardigde standaard-kristallen, waarbij de electroden direct op het kwarts zijn aangebracht, verminderde, tengevolge van het evacueeren, de demping ongeveer met een factor 4. De mate van vermindering hangt overigens direct af van de nog overblijvende demping. Deze laatste wordt veroorzaakt door de ondersteuning, door de op het kwarts opgedampte electroden, door de verliezen in het kwarts, terwijl ook de hoedanigheid van het oppervlak van invloed is.

De demping, veroorzaakt door de ondersteuning, wordt bijzonder klein, wanneer men het kristal ophangt aan dunne draadjes, die met zoo weinig mogelijk soldeer, in een trillingsknoop of -knooplijn aan de electroden bevestigd zijn. Een dergelijk „zwevend" kristal is echter buitengewoon kwetsbaar; het insmelten in een glasballon, die later geëvacueerd kan worden, ondervindt groote moeilijkheden.

Wanneer men het kristal in of nabij een trillingsknoop of -knooplijn ondersteunt met dunne stalen pennetjes, die afgestemd zijn op de frequentie van het kristal, is de demping tengevolge van de

ondersteuning eveneens zeer gering [1]). Op deze wijze laat zich uitstekend een stabiele houder construeeren, die geëvacueerd kan worden. Slechts dient men daarbij er voor zorg te dragen, dat de specifieke druk van de pennetjes op het plaatje zoo groot is, dat glijden niet kan voorkomen, aangezien daardoor extra verliezen optreden.

In fig. 6 is een houder met afgestemde pennetjes afgebeeld,

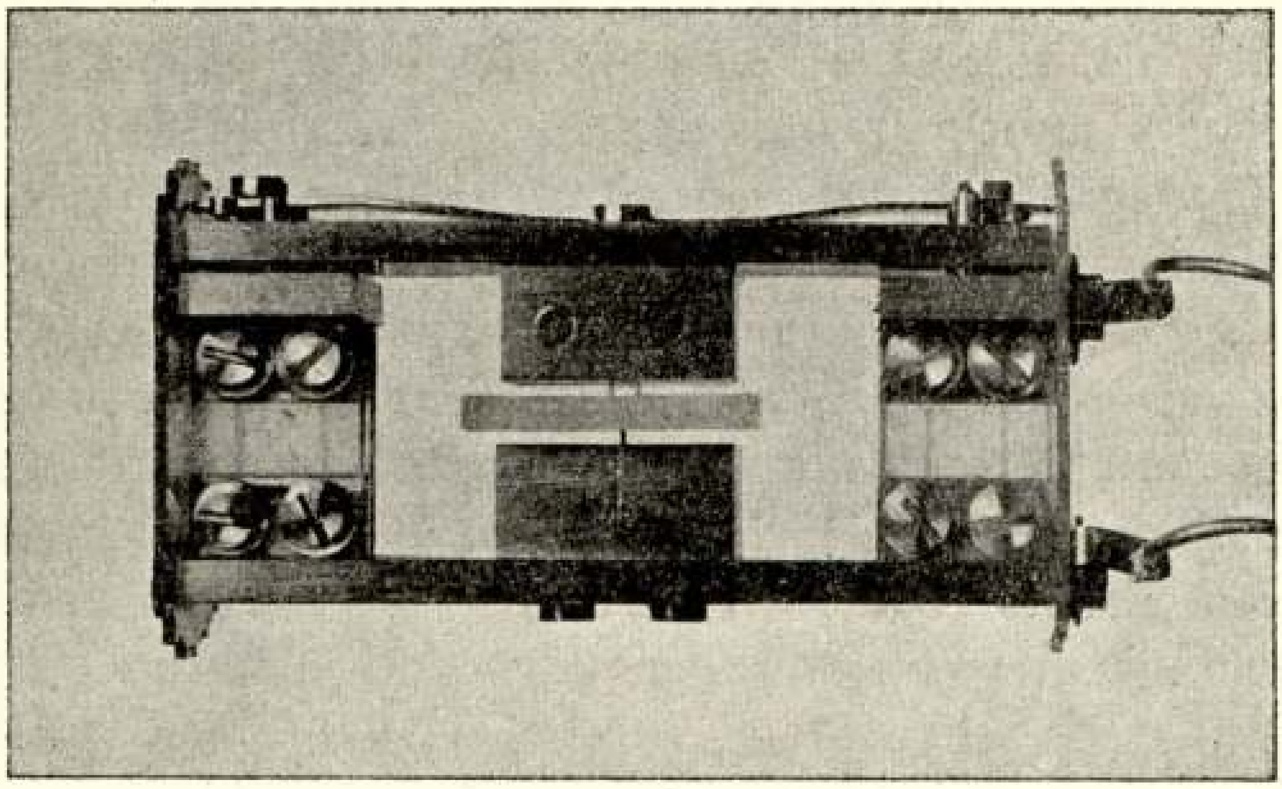


Fig. 6. Houder met afgestemde pennetjes.

bestemd voor een *DT*-snede. De pennetjes zijn ongeveer 0,2 mm dik en ongeveer 1,3 mm. lang.

Een derde ondersteuningswijze, die eveneens vrij geringe demping geeft, bestaat daarin, dat men het kristal in een knooppunt of knooplijn bevestigt tusschen niet-afgestemde pennetjes. Deze bevestigingswijze is zelfs bijzonder aantrekkelijk, omdat men door toepassing daarvan eenvoudige houders kan construeeren. Een bezwaar is, dat men het kristal zeer nauwkeurig in den houder moet stellen, zoodat de ondersteuningspennetjes zich ook werkelijk op een knooplijn, resp. in een knooppunt bevinden. Aangezien de ondersteuningspunten steeds vrijwel in één lijn liggen, is deze opstelling in het algemeen niet bijzonder stabiel. Bovendien is, naar uit onderstaand meetstaatje blijkt, de demping bij een houder met afgestemde pennetjes niet onaanzienlijk gunstiger, dan bij een houder met niet-afgestemde pennetjes.

1) Op deze ondersteuningswijze, oorspronkelijk afkomstig van het Telegraaf- en Telefoonlaboratorium, is octrooi aangevraagd.

Tot nu toe werd daarom door ons aan de ondersteuning door middel van afgestemde pennetjes de voorkeur gegeven, hoewel die door middel van niet-afgestemde pennetjes nog nader wordt onderzocht.

Hieronder volgt een opgave van den weerstand R_k uit het vervangingsschema van fig. 1, die bij een bepaald kristal gemeten werd:

hangend aan draadjes	R_k in lucht	$\approx$	1100 Ω*
tusschen niet afgestemde pennetjes	„ „ „	$\approx$	1400 Ω
„ „ „	„ „ „	$\approx$	1040 Ω*
„ niet „ „	„ „ vacuum	=	336 Ω
„ „ „	„ „ „	=	248 Ω

Bij beschouwing van deze resultaten dient men te bedenken, dat de nauwkeurigheid van de meting van R_k in lucht niet groot is; de uitkomst wordt dan nl. sterk beïnvloed door staande luchtgolven. De met een * gemerkte waarnemingen zijn derhalve practisch als gelijk aan te merken.

Wat betreft de demping veroorzaakt door de op het kwarts opgedampte electroden, kan opgemerkt worden, dat deze, althans tot een bepaalde grens, afneemt naarmate men de electroden dunner maakt. De dikte van de electroden heeft bovendien, zooals te verwachten is, eenigen invloed op de eigen-frequentie.

Onderstaand staatje geeft voor een bepaald kristal een indruk van de grootte-orde van deze effecten; de daarin aangegeven electrode II is ongeveer tweemaal zoo dik als electrode I. Beide electroden bestaan uit opgedampt aluminium.

Electrode I	R_k in vacuum = 760 Ω,	freq.	100.002,6 Hz
„ II	„ „ „ = 812 Ω,	„	100.000,0 „

Tenslotte blijkt de hoedanigheid van het oppervlak van het plaatje invloed op de demping te hebben [1]). Deze invloed is zelfs betrekkelijk groot. Door reinigen van het plaatje en door etsen kan men de demping niet onaanzienlijk verminderen, zooals uit onderstaande gegevens blijkt:

Kristal	510^b	vuil	R_k in vacuum	= 804 Ω
„	510^b	gereinigd	„ „ „	= 592 Ω
„	719	„	„ „ „	= 304 Ω
„	719	geëtst	„ „ „	= 164 Ω

1) "A determination of some of the properties of the piezo-electric quartz resonator" Karl S. van Dyke, Proc. I.R.E. 1935 p. 386.

Afmetingen van het kristal.

Eén van de afmetingen van het kristalplaatje ligt vast, omdat men een bepaalde eigenfrequentie wenscht. Bij de hiervoor besproken temperatuur-onafhankelijke sneden bestaat er bovendien een verband tusschen twee afmetingen. Bij de *AT*-, *BT*-, *CT*- en *DT*-snede zijn de plaatjes vierkant; bij de *GT*-snede hebben de zijden een bepaalde verhouding. Men kan echter één afmeting nog betrekkelijk willekeurig kiezen; betrekkelijk, omdat men toch ook altijd moet blijven voldoen aan de voorwaarde, dat bij een plaat de dikte klein moet zijn ten opzichte van de lengte en de breedte. Deze eene vrijheidsgraad is echter voldoende om aan den vierden eisch te voldoen en de grootheden L_k, C_k en C_p van het electrische vervangingsschema een bepaalde gewenschte waarde te geven.

Het verband tusschen deze „vrije" afmeting en degrootheden L_k, C_k en C_p hangt af van de toegepaste snede en van de trillingswijze.

Bij de *DT*-snede b.v., waarvan de frequentie van de breedte afhangt, bepaalt de dikte de grootte van L_k en wel is $L_k \approx 53$ H per mm dikte. Bij de *CT*-snede is deze factor ≈ 22 H/mm, terwijl de waarde bij de *GT*-snede ≈ 18 H/mm bedraagt. *DT*-sneden leveren derhalve hooge-impedantiekristallen op, *CT*- en *GT*-sneden daarentegen lage-impedantiekristallen.

Wat de laatste eisch betreft kan vermeld worden, dat men voor een kristal, dat moet dienen voor een frequentie-standaard, een overeenstemming met de nominale frequentie wenscht van de orde van 1.10^{-8} of 1.10^{-9}. Zoo nauwkeurig kan men niet slijpen. Een kristal van 100 kHz kan men met veel geduld door slijpen afregelen tot op ongeveer 0,1 Hz, dat is dus een nauwkeurigheid van 1.10^{-6}. De overblijvende frequentie-afwijking moet op electrische wijze gecorrigeerd worden.

Teneinde een indruk te geven van wat te bereiken is, volgen hieronder de gegevens van een goed standaard-kristal voor 100 kHz. Het oppervlak is geëtst, de electroden bestaan uit opgedampt aluminium; het kristal is opgesteld tusschen afgestemde pennetjes in een geëvacueerden houder.

Kristal 719: $R_k = 172\ \Omega$, $L_k = 46$ H,

$$\delta = \frac{R_k}{2fL_k} = 18{,}6.10^{-6},\ Q = 168.000.$$

Keuring van kwarts.

Nadat in het voorgaande de eischen besproken zijn, die men aan een goed generatorkristal stelt, alsmede de wijze waarop aan deze eischen kan worden voldaan, zal thans eenige aandacht worden besteed aan het materiaal, waaruit de preparaten vervaardigd worden: het kwarts.

Zooals reeds vermeld is, komt het piëzo-electrische kwarts in twee variëteiten voor, nl. rechts- en linksdraaiend. De ideale kristalvormen zijn in fig. 2 afgebeeld, in elk kristal is het bijbehoorende assenkruis geteekend. Bij een ideaal kristal kan men derhalve aan den uitwendigen vorm reeds zien of het links- of rechtsdraaiend is, en tevens hoe de assen loopen.

Intusschen zijn dergelijke ideale kristallen zeldzaam. Veelal is van de x- en s-vlakken geen enkel aanwezig, terwijl andere vlakken soms ook ontbreken. Bovendien is het meer regel dan uitzondering, dat een stuk kwarts, dat oppervlakkig uit één kristal schijnt te bestaan, bij nauwkeurig onderzoek uit meerdere exemplaren blijkt te zijn samengesteld.

Dergelijke „tweelingkristallen" kunnen, behalve uit geheel willekeurige samengroeiïngen, o.a. bestaan uit een samengroeiïng van:

a. twee kristal-individuën, waarvan de Z-assen evenwijdig loopen, doch waarvan het eene links- en het andere rechtsdraaiend is: zg. optische tweeling;

b. twee kristal-individuën, waarvan de Z-assen evenwijdig loopen en die beide links- of beide rechtsdraaiend zijn, terwijl één kristal t.o.v. het andere 180° om de Z-as gedraaid is: zg. electrische tweeling.

Aangezien de piëzo-electrische en elastische eigenschappen van kwarts, afhangen van de richting, moet men er zorg voor dragen van dergelijke tweelingkristallen slechts die deelen te gebruiken, die tot één individu behooren.

De grenzen van de samenstellende deelen kan men bepalen door etsen met HF. Hierdoor worden alle soorten tweelingen zichtbaar. Fig. 7 toont eenige voorbeelden daarvan. Dit etsen is bovendien tegelijk een middel om bij benadering de richting van de assen te bepalen en tevens den richtingszin.

Tengevolge van het etsen ontstaan nl. op het matgeslepen oppervlak van één kristalindividu groepen prismatische of pyramidale

etsfiguurtjes, waarvan de correspondeerende vlakjes evenwijdig loopen. Kijkt men door een dergelijk oppervlak, bedekt met regelmatig gerangschikte doorschijnende lichaampjes, naar een puntvormige lichtbron, dan ziet men geen lichtpunt maar een lichtfiguur,

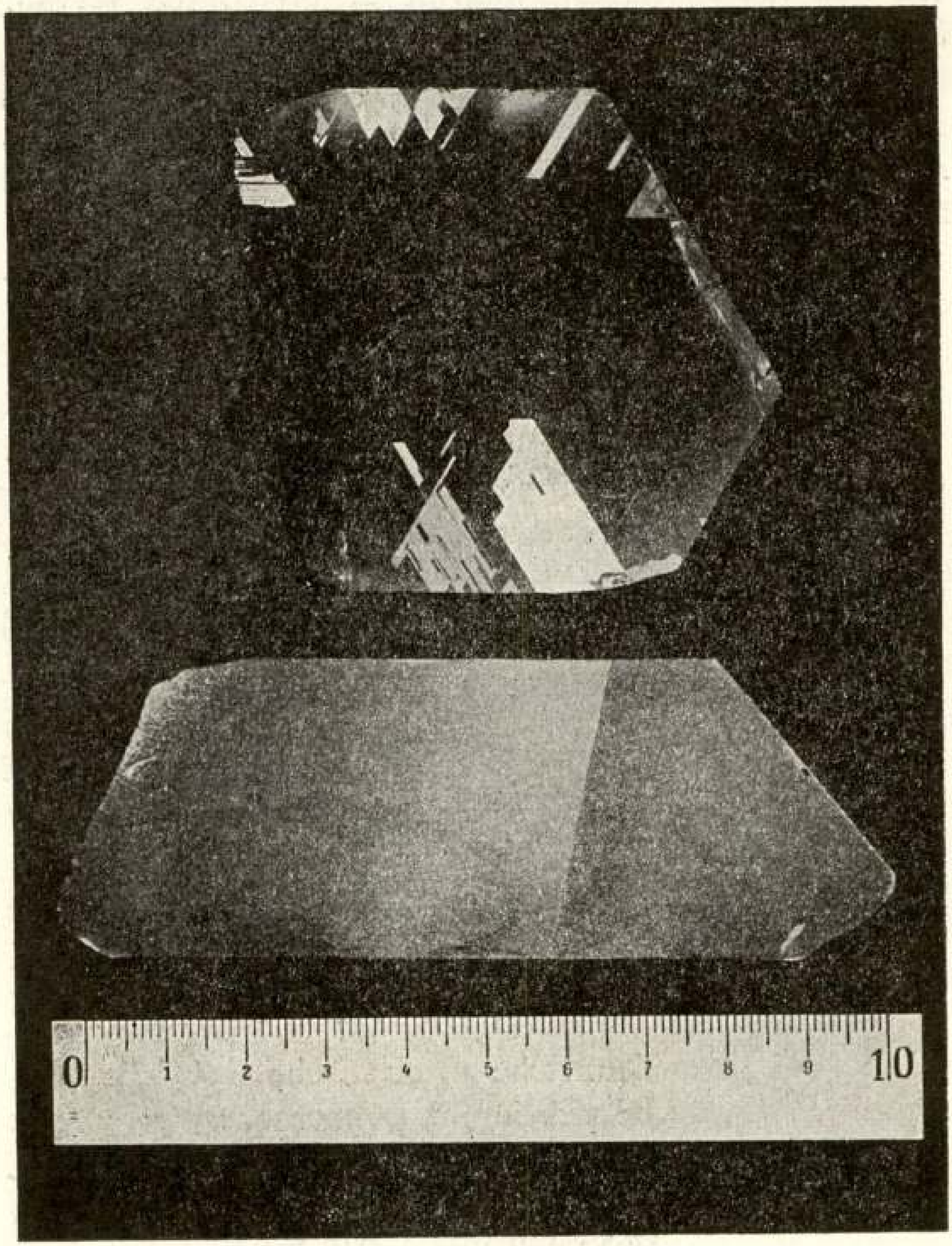


Fig. 7. Geëtste kwartskristallen.

waarvan de vorm samenhangt met de op het oppervlak aanwezige etsfiguurtjes. Aangezien deze figuurtjes voor verschillende sneden verschillend zijn, heeft men in de lichtfiguur een middel om de snede te herkennen. Bijzonder karakteristiek zijn de figuren op

X-, *Y*- en *Z*-sneden. Fig. 8 geeft hiervan een indruk. Uit deze afbeelding ziet men dat reeds één enkele etsfiguur voldoende is, om

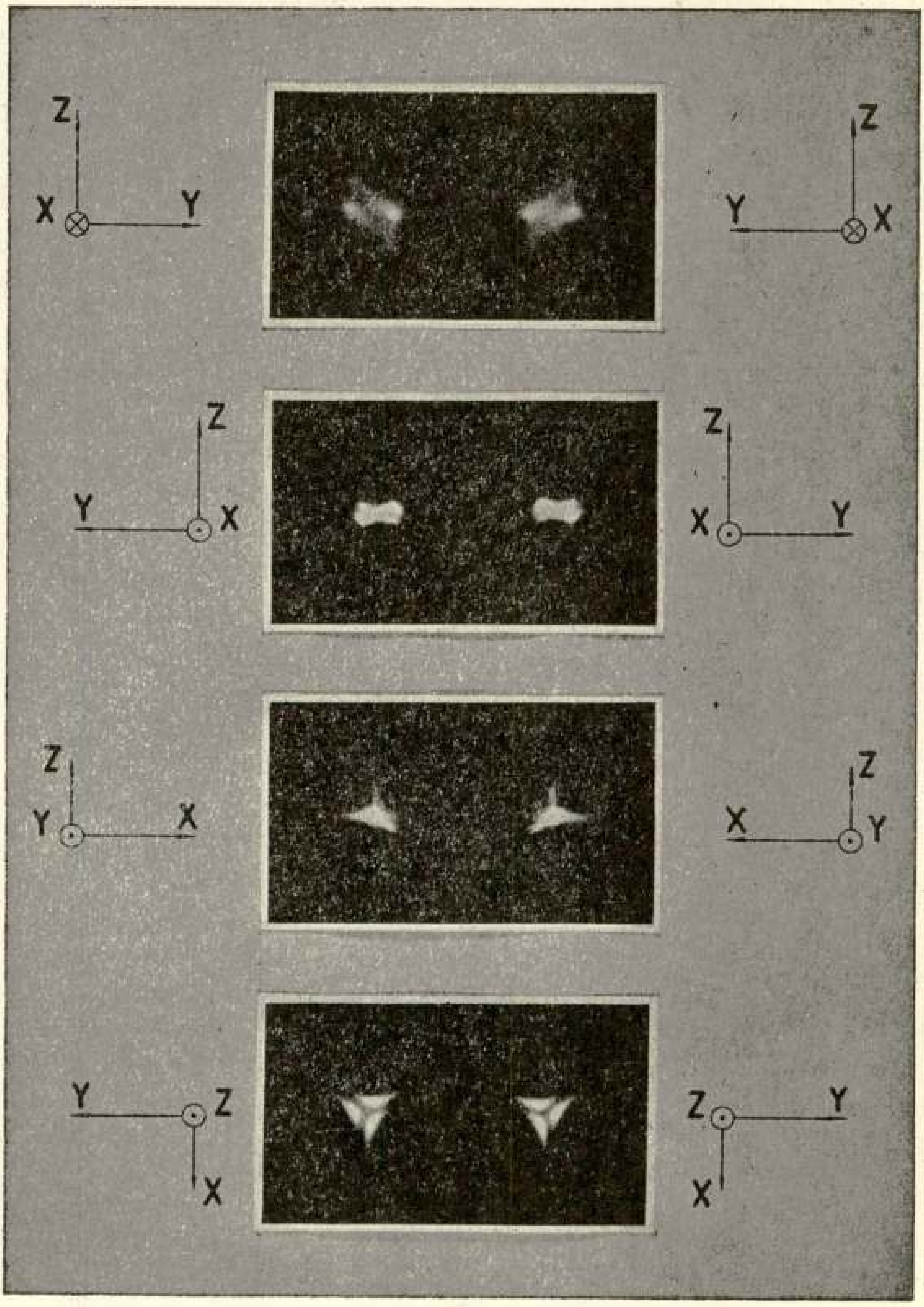


Fig. 8. Verband tusschen etsfiguren en asrichtingen.

bij benadering de richtingen en, wat vooral ook van belang is, den richtingszin van de assen te bepalen.

Men heeft wel voorgesteld de asrichtingen uit deze etsfiguren te bepalen; dit geeft evenwel vrij onnauwkeurige uitkomsten. Indien

het stuk kwarts eenige herkenbare top- of zuilvlakken heeft, is richten daarop nauwkeuriger.

Bewerking.

De bewerkingen, die noodig zijn om uit een stuk ruw kwarts een piëzo-electrisch element te maken, bestaan uit zagen en slijpen.

Het zagen gebeurt met een zg. diamantzaag of met een zg. carborundumzaag. De eerste bestaat uit een draaiende ijzeren schijf, waarvan de omtrek met diamantpoeder geprepareerd is. De dikte van de schijf is ongeveer 1 mm. Als smeer- en koelmiddel past men petroleum toe. De omtreksnelheid bedraagt 10 à 20 m/sec. Indien de aanzet klein genomen wordt verkrijgt men met een diamantzaag een gelijkmatige gladde snede.

Bij de carborundumzaag draait een ijzeren zaagblad in een papje van carborundum en water. De dikte van het zaagblad is ook hierbij ongeveer 1 mm, de omtreksnelheid moet geringer zijn dan bij de diamantzaag, teneinde te voorkomen, dat het carborundum van de schijf geslingerd wordt. De carborundumzaag snijdt dientengevolge iets langzamer dan de diamantzaag. Aangezien in den toevoer van het carborundum kleine onregelmatigheden voorkomen, is de snede veelal iets ongelijkmatiger dan bij de diamantzaag.

Beide zagen hebben het voordeel, dat ze snijden zoolang men het kwarts tegen de draaiende schijf drukt. Bij andere soorten zaagbladen is zulks niet steeds het geval. Een nadeel van beide is, dat het zaagblad op den duur niet vlak blijft. Het zaagblad van de carborundumzaag moet men van tijd tot tijd opnieuw richten, bij de diamantzaag wordt dan tevens nieuw diamantpoeder in den omtrek aangebracht. Een dergelijke „vulling" met diamant is kostbaar; bij de carborundumzaag zijn de bedrijfskosten gering.

Het slijpen geschiedt op een horizontaal draaiende slijpschijf, waarvan de diameter ongeveer 20 cm bedraagt en die ongeveer 150 omw/min maakt. Als slijpmiddelen worden gebruikt carborundum en amaril. Men begint met grof slijppoeder en gaat, naarmate de afmetingen van het kwartslichaam tot de gewenschte afmetingen naderen, op steeds fijner poeder over.

Carborundum is aanzienlijk harder dan amaril; het wordt daarom gebruikt als men veel materiaal moet wegslijpen, dus in de eerste stadia van de bewerking. De laatste afregeling gebeurt steeds met amaril. Men verkrijgt hiermee een fijn mat oppervlak; bovendien

slijpt het langzaam, iets wat bij het precies op de juiste frequentie brengen van een kwartsplaatje bijzonder gewenscht is.

In het Radiolaboratorium van de P.T.T. worden de plaatjes vrijwel geheel met de hand vervaardigd, waarbij eenige eenvoudige hulpapparaten gebruikt worden b.v. bij het slijpen van rechte hoeken en van platte vlakken.

Wat betreft de nauwkeurigheid van de afwerking en de contrôle daarop kan het volgende vermeld worden.

De door ons vervaardigde kristallen worden zeer fijn geslepen, doch als regel niet gepolijst, zoodat optische contrôlemethoden, b.v. door middel van interferentie, niet toegepast kunnen worden. De beoordeeling of een vlak al dan niet plat is, geschiedt met behulp van een precisie-rij; de nauwkeurigheid van deze methode wordt geschat op ongeveer 0,001 mm.

Twee vlakken worden evenwijdig genoemd wanneer de onderlinge afstand overal tot op 0,001 mm gelijk is. De meting van de evenwijdigheid vindt plaats met een direct aanwijzenden meter, een zg. Orthotest van de firma Zeiss.

Rechte hoeken worden gemeten met een nauwkeurigen winkelhaak, andere hoeken met een goede verstelbare hoekmaat. De met deze instrumenten bereikbare hoeknauwkeurigheid wordt geschat op 5 à 10′. Grootere nauwkeurigheid heeft weinig zin, aangezien de natuurvlakken, waarvan uitgegaan wordt, in het algemeen niet geheel plat zijn.

De vraag doet zich voor of de tolerantie voor de platheid en evenwijdigheid niet te streng is. Bij piëzo-electrische lichamen gaat het in eerste instantie immers om de eigenfrequentie en ook al heeft een kwartsplaat een min of meer wigvormige doorsnede, dan correspondeert deze toch slechts met één eigen-frequentie en niet met een frequentieband, zooals men wel eens ten onrechte gemeend heeft [1]). Wat dit betreft is de hiervoor vermelde nauwkeurigheid derhalve niet noodig. De ervaring leert evenwel, dat een plaat met behoorlijk platte en evenwijdige vlakken een geringere demping heeft dan een minder goed afgewerkte plaat, terwijl men bij de eerste ook de neven-frequenties beter beheerscht. Bovendien komt b.v. bij *GT*-sneden de verhouding van de zijden er zeer precies op aan; een verandering van één eenheid in de derde decimaal is reeds

1) "Lames piézo-électriques d'épaisseur non uniforme" A. Guerbilsky, Journ. de Physique. 1937 p. 165.

duidelijk merkbaar. Teneinde eenigszins reproduceerbare uitkomsten te verkrijgen is de opgegeven nauwkeurigheid dus tevens gewenscht.

Niet zonder opzet is gezegd „eenigszins" reproduceerbaar. Een ieder, die zich met de vervaardiging van piëzo-electrische lichamen uit kwarts bezighoudt, dient er zich nl. van bewust te zijn, dat hij werkt met een in de natuur gevormd materiaal, dat vele uitstekende eigenschappen bezit, maar dat toch ook allerlei grilligheden vertoont. Een streng doorgevoerde keuring zal eenigszins grove materiaalfouten aan het licht brengen en daardoor veel onproductief werk voorkomen; kleine afwijkingen blijven evenwel vaak onopgemerkt en toch kunnen deze soms groote verschillen in eigenschappen veroorzaken. Bij de vervaardiging heeft men aan het ontwerp derhalve niet meer dan een richtlijn, het gewenschte resultaat zal men bij ieder nieuw plaatje slechts tastenderwijs na een aantal correcties kunnen bereiken.

Naschrift.

Men heeft mij gevraagd met een enkel woord aan te duiden, hoe de temperatuuronafhankelijkheid van de frequentie bij de op speciale wijze georiënteerde sneden ontstaat.

De volgende beschouwing moge hiertoe dienen:

De frequentie van de grondtrilling van een staaf- of plaatvormig kristal wordt gegeven door een formule van den vorm:

$$f = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{c}{\varrho}} \qquad \qquad (1)$$

waarin l de beteekenis heeft van een lengte en c die van een elasticiteitsmodulus, terwijl ϱ de dichtheid van het materiaal is.

De grootheden l, c en ϱ zijn functies van de temperatuur T en derhalve f eveneens.

Uit (1) volgt door partieel differentiëeren naar T:

$$\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial T} = -\frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial T} + \frac{1}{2c}\frac{\partial c}{\partial T} - \frac{1}{2\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial T} \qquad \qquad (2)$$

Links van het gelijkteeken staat de temperatuurcoëfficiënt van de frequentie; het rechterlid bevat drie materiaalconstanten nl.:

1°. de lineaire uitzettingscoëfficiënt,

2°. de temperatuurcoëfficiënt van c,

3°. de temperatuurcoëfficiënt van de dichtheid.

In het algemeen hangen deze drie grootheden af van de oriëntatie. Omtrent het teeken kan opgemerkt worden, dat $\frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial T}$ voor alle oriënteeringen positief is, terwijl $\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial T}$ steeds negatief is. Welk teeken de grootheid $\frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial T}$ heeft, is niet zoo direct in te zien, maar onafhankelijk van het teeken van dezen term bevat het rechterlid van (2) een positieven en een negatieven term. Het is derhalve duidelijk, dat er richtingen kunnen zijn, waarvoor het rechterlid van de vergelijking (2) nul wordt. Voor die richtingen is dan de temperatuurcoëfficiënt van de frequentie tevens nul.

Discussie.

Ir. Huydts merkt op, dat het electrisch aequivalent in zijn eenvoudigsten vorm niet twee *eigen*frequenties heeft; uitwendig zijn er wel twee markante *resonantie* gevallen. Een vraag is of de afgestemde houderpennetjes ook aanleiding tot koppeltrillingen geven en of de temperatuurafhankelijkheid van die pennetjes geen bezwaar is.

Ir. Vormer: Inderdaad zijn dit een andere soort eigenfrequenties dan die, welke b.v. door koppelverschijnselen ontstaan. Het electrische aequivalent heeft twee frequenties, waarvoor de impedantie van het geheel reëel is, twee resonantie-frequenties dus. Afhankelijk van de schakeling kan men het kristal in ieder van deze frequenties laten uittrillen. Sluit men de electroden kort, dan komt de eigenfrequentie overeen met de serieresonantiefrequentie; laat men de electroden open, dan komt de eigenfrequentie overeen met de parallel-resonantie-frequentie.

Door de afgestemde pennetjes wordt de temperatuurcoëfficiënt van het geheel iets gewijzigd. Men kan hiermede evenwel rekening houden en de temperatuurcoëfficiënt van het kristal een zoodanige waarde geven, dat die voor het complex van kristal met houder weer nul is.

Koppeltrillingen ontstaan bij de door ons gebruikte pennetjes niet.

Prof. Gorter: Werkt men in het geval van diktetrilling ook met zijdelings door pennetjes ingeklemde kristallen? Zou het in dat geval niet te verwachten zijn, dat de invloed van de gesteldheid van boven- en ondervlak gering is?

V.: Het eerste is mij niet bekend, mogelijk lijkt het wel. Meestal bevestigt men dergelijke kristallen anders, in verband met het feit, dat het geheele

middenvlak een knoopvlak is. Voor frequentiestandaarden komen dergelijke kristallen in verband met de hooge temperatuurcoëfficiënt niet in aanmerking, voor andere toepassingen zijn de eischen minder hoog en is de noodzakelijkheid van een dempingsarme opstelling dus niet groot.

Omtrent den invloed van etsen beschik ik zelf slechts over de gegevens bij schuiftrillingen. Van Dyke bespreekt in het hiervoor aangehaalde artikel den invloed bij een X-snede, die in de Y-golf trilt. Hij veronderstelt, dat de verbetering ontstaat, doordat kleine stukjes kwarts, die door het slijpmiddel ten deele losgebroken zijn, maar die nog in het oppervlak vastzitten, weggenomen worden, of doordat kleine barstjes in het oppervlak verwijd worden, zoodat de verschillende oppervlaktedeeltjes niet meer tegen elkaar wrijven.

Bij de door U bedoelde diktetrilling (X-trilling in een X-snede) bewegen de deeltjes van het oppervlak weinig of niet ten opzichte van elkaar. Is de verklaring, die Van Dyke van het verschijnsel geeft, juist, dan zou bij deze trilling de invloed van etsen niet groot kunnen zijn.

Ir. Van der Lek merkt naar aanleiding van de vraag van Prof. Gorter op, dat men niet alleen met transversaal maar ook met longitudinaal resoneerende pennetjes werkt.

Trillende kwartskristallen en hun toepassing in de ultra-acoustiek

door C. Zwikker

§ 1. Gebruik makende van het piëzo-electrische effect kan het kwartskristal in heftige beweging worden gebracht, indien de frequentie van de aangelegde wisselspanning overeenkomt met de mechanische eigenfrequentie van het kwarts. Eenvoudigheidshalve zullen wij alleen longitudinale dikte-trillingen van een kwartsschijf, genomen uit het kristal volgens een X-snede (dus voor- en achtervlak loodrecht op de electrische as), beschouwen.

Wij willen eerst het verband vinden tusschen de lading zetelend op de metallieke bekleedsels en de uitwijking van boven-, resp. benedenvlak. Daartoe beschouwen wij een kwartsschijf, welke trilt in zijn eerste resonantiefrequentie. Tijdens de trilling kan de momenteele uitwijking van het punt op afstand x van het middenvlak dan gegeven worden door

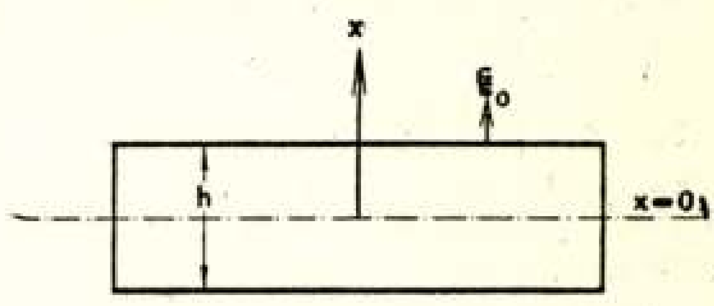


Fig. 1. Longitudinaal trillende X-snede.

$$\xi = \xi_0 \sin \frac{\pi x}{h},$$

waarin ξ_0 de uitwijking van het bovenvlak en het ondervlak is. De relatieve rek is:

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Deze relatieve rek ε gaat gepaard met een spanning σ en een polarisatie P (fig. 2).

De polarisatie is variabel naar x, wat tengevolge heeft, dat er ruimteladingen in het kwarts optreden, waarvan de dichtheid bedraagt:

$$\varrho = -\frac{\partial P}{\partial x}.$$

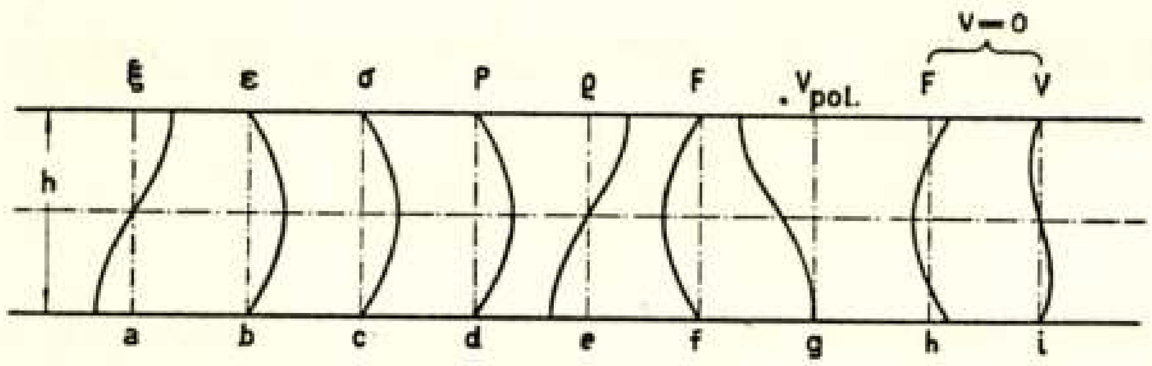


Fig. 2. Verloop der diverse toestandsgrootheden in een kwartsschijf, die in zijn eerste resonantiefrequentie trilt. Alle grootheden zijn positief als zij naar rechts zijn uitgezet. a—g gelden voor een „open" kwarts; h en i voor een „kortgesloten" kwarts.

De van de polarisatie afkomstige ladingen zouden samen een spanningsafval $V_{polarisatie}$ in het kwarts opwekken.

Wordt echter de spanning V op de kwartsbekleedingen voortdurend gelijk gehouden aan nul, dan moet op deze bekleedingen een ladingsdichtheid D komen, die de polarisatiespanning precies opheft.

Wij behoeven σ en P niet afzonderlijk te berekenen, maar gaan ter berekening van D uit van de grondvergelijkingen, genoemd in de inleiding van den Voorzitter *), n.l.:

$$D = KF + q\sigma \; ; \qquad \varepsilon = qF + \sigma/E,$$

waaruit:

$$D = (K - q^2E)\, F + qE\varepsilon.$$

Deze formule wordt geïntegreerd naar x van $-h/2$ tot $+h/2$. Bedenken wij, dat D hierbij constant is (daar $\frac{\partial D}{\partial x} = \text{div}\, D = 0$), $\int F dx = V$, $\int \varepsilon dx = 2\xi_0$, dan volgt voor het geval $V = 0$:

---

*) B. D. H. Tellegen, Ned. T. voor Natuurk. **8**, 270, 1941.

$$D = \frac{Eq}{h} \cdot 2\xi_0, \text{ dus voor de lading: } Q = \frac{AEq}{h} \cdot 2\xi_0 \qquad (1)$$

De grootheid $\mathcal{M} = \frac{AEq}{h}$ (A = oppervlak) noemen wij de electromechanische koppelingscoëfficient.

Is de spanning V op de bekleedingen niet nul, dan wordt de lading daarvan:

$$Q = CV + \mathcal{M} \cdot 2\xi_0, \qquad (2)$$

waarvan C de capaciteit is.

§ 2. De bewegingsvergelijking voor een niet piëzo-electrisch kristal is: $K = Z_{mech} \cdot 2v_0$, waarin K een van de twee krachten is, die wij tegengesteld werkend op de beide oppervlakken van het kristal denken te zijn aangebracht (fig. 3).

Is de beweging harmonisch, zoodat alle toestandsgrootheden evenredig zijn aan $e^{j\omega t}$, dan is $v_0 = j\omega\xi_0$ en luidt de bewegingsvergelijking voor een niet-piëzo-electrisch kristal: $K = j\omega Z_{mech} \cdot 2\xi_0$.

Is het kristal echter piëzo-electrisch, dan komt er een term bij en wel is:

$$K = j\omega Z_{mech} \cdot 2\xi_0 - \mathcal{M} \cdot V \qquad (3)$$

De kracht wordt bij onverplaatste eindoppervlakken bepaald door de electrische spanning V. De koppelingscoëfficient noemen wij weer $\mathcal{M}$; men kan namelijk thermodynamisch laten zien, dat de beide hier ingevoerde koppelingscoëfficienten aan elkaar gelijk zijn en wel als volgt:

$$TdS = dU - Kd\,(2\xi_0) - VdQ.$$

$$d\,(U - VQ) = TdS + Kd\,(2\xi_0) - QdV.$$

Omdat $U - VQ$ een toestandsfunctie is, zeg $G\,(2\xi_0, V)$ moeten de tweede afgeleiden

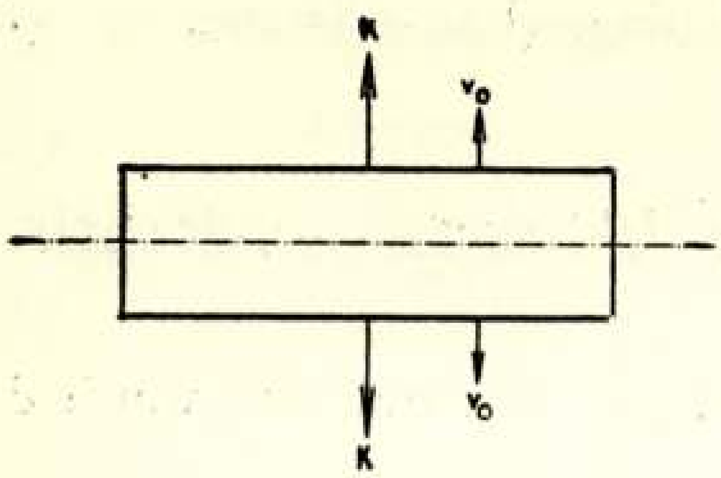


Fig. 3. Definitie van de mechanische impedantie.

$$\frac{\partial^2 G}{\partial (2\xi_0)\, \partial V} \text{ en } \frac{\partial^2 G}{\partial V \partial (2\xi_0)}$$

aan elkaar gelijk zijn, wat levert:

$$\left(\frac{\partial K}{\partial V}\right)_{2\xi_0} = -\left(\frac{\partial Q}{\partial (2\xi_0)}\right)_V,$$

en hier staat niet anders dan dat de beide koppelingscoëfficienten aan elkaar gelijk zijn.

§ 3. Combinatie van (2) en (3) levert bij afwezigheid van een uitwendige kracht K

$$Q = \left(C + \frac{\mathcal{M}^2}{j\omega Z_{mech}}\right) V.$$

Denk alle grootheden te varieeren evenredigheid met $e^{j\omega t}$ en differentieer beide leden van deze vergelijking naar t. Bedenken wij dat

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = i \text{ (stroomsterkte)}$$

en dat

$$\frac{\partial}{\partial t} = j\omega, \text{ dan ontstaat}$$

$$i = \left(j\omega C + \frac{\mathcal{M}^2}{Z_{mech}}\right) V. \tag{4}$$

Nu is de zichtbare electrische impedantie

$$Z_{el} = \frac{1}{j\omega C}.$$

De vergelijking (4) is dus ook te schrijven in de vorm:

$$\frac{i}{V} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_{el}} + \frac{\mathcal{M}^2}{Z_{mech}}. \tag{5}$$

Dit is de formule voor een parallelschakeling. Zie fig. 4.

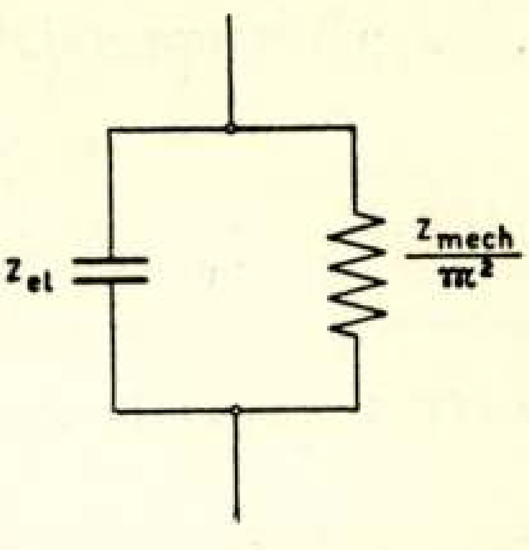


Fig. 4. Electrisch vervangingsschema van het trillende kwarts.

§ 4. Nu moeten wij nog Z_{mech} uitrekenen voor een trillend kwarts, dat wij eenvoudigheidshalve zullen aannemen symmetrisch belast te zijn met een acoustische impedantie, zoodat de bovenbedoelde Z_{mech} gelijk is aan de mechanische impedantie van het kwarts plus een bijdrage van de acoustische impedantie, waarmee elk der beide oppervlakken is belast.

Wij beschouwen de staande trilling als de superpositie van een heengaande en teruggaande golf.

De snelheid is op de plaats x:

$$v = \frac{\partial \xi}{\partial t} = j\omega\xi = j\omega\hat{\xi}e^{j\omega t}\left(e^{-j\frac{2\pi x}{\lambda} - \beta x} - e^{j\frac{2\pi x}{\lambda} + \beta x}\right).$$

Hierin is λ de golflengte, β de extinctiecoëfficient, die voor kwarts buitengewoon klein is.

Aan het oppervlak $\left(x = \frac{h}{2}\right)$ is de snelheid:

$$v_0 = j\omega\hat{\xi}e^{j\omega t}\left(e^{-j\frac{\pi h}{\lambda} - \beta\frac{h}{2}} - e^{j\frac{\pi h}{\lambda} + \beta\frac{h}{2}}\right).$$

De specifieke rek is op de plaats x:

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} = -j\frac{2\pi}{\lambda}.\,\hat{\xi}e^{j\omega t}\left(e^{-j\frac{2\pi x}{\lambda} - \beta x} + e^{j\frac{2\pi x}{\lambda} + \beta x}\right)$$

en de spanning (onder verwaarloozing van termen met q^2):

$$\sigma = E\varepsilon = -jE\frac{2\pi}{\lambda}\hat{\xi}e^{j\omega t}\left(e^{-j\frac{2\pi x}{\lambda} - \beta x} + e^{j\frac{2\pi x}{\lambda} + \beta x}\right)$$

en aan het oppervlak, waar $x = \frac{h}{2}$:

$$\sigma_0 = -jE\frac{2\pi}{\lambda}\hat{\xi}e^{j\omega t}\left(e^{-j\frac{\pi h}{\lambda}-\beta\frac{h}{2}} + e^{j\frac{\pi h}{\lambda}+\beta\frac{h}{2}}\right).$$

De impedantie van het kristal met oppervlak A is dus:

$$Z_{kristal} = \frac{K}{2v_0} = \frac{\sigma_0 A}{2v_0} = \frac{EA}{2c}\coth\left(j\frac{\pi h}{\lambda} + \beta\frac{h}{2}\right), \tag{6}$$

waarin c de voortplantingssnelheid is.

Een schakelschema van een eindig aantal elementen kan hieraan in het algemeen niet aequivalent zijn. Wel kunnen wij zoeken naar het beste aequivalente electrische schema in een klein ω-traject, b.v. rondom de eerste resonantie.

Ontwikkeling van (6) naar $\frac{\pi h}{\lambda}$ in de buurt van $\frac{\pi}{2}$ (eerste resonantie) geeft:

$$e^{-j\frac{\pi h}{\lambda}-\beta\frac{h}{2}} = \left(-j - \frac{h}{2c}\triangle\omega\right)\left(1 - \beta\frac{h}{2}\right) = -j - \frac{h}{2c}\triangle\omega + j\beta\frac{h}{2},$$

$$e^{j\frac{\pi h}{\lambda}+\beta\frac{h}{2}} = \left(j - \frac{h}{2c}\triangle\omega\right)\left(1 + \beta\frac{h}{2}\right) = j - \frac{h}{2c}\triangle\omega + j\beta\frac{h}{2},$$

dus: $Z_{kristal} = \frac{EA}{2c}\left(\beta\frac{h}{2} + j\frac{h}{2c}\triangle\omega\right)$ of tevens invoerend:

$$d = \text{spec. massa; } c^2 = \frac{E}{d} \text{ en de massa } m = dhA:$$

$$Z_{kristal} = \beta c\frac{m}{4} + j\frac{m}{4}\cdot\triangle\omega, \tag{7}$$

welke formule dus alleen geldt in de buurt van de eerste resonantie.

Wanneer we deze uitdrukking vergelijken met die voor de impedantie van een electrische keten:

$$Z = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + R,$$

wat in de buurt van de resonantie, ontwikkeld naar $\triangle \omega$, en onder gebruikmaking van $\omega^2 = \frac{1}{LC}$ geeft:

$$Z = R + j\, 2L \triangle\omega,$$

dan zien wij, dat het vervangingsschema van $Z_{kristal}$ is als in fig. 5.

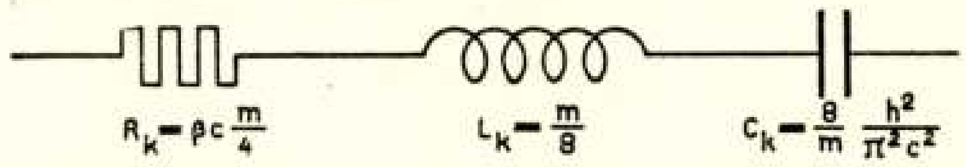


Fig. 5. Schema van de mechanische impedantie van het kwarts in de buurt van de eerste resonantie.

De waarde van C_k is daarbij berekend uit:

$$\frac{1}{L_k C_k} = \omega^2 = \frac{4\pi^2 c^2}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 c^2}{h^2}.$$

§ 5. Voor de acoustische impedantie van de beide als parallel geschakeld te beschouwen eindvlakken kunnen wij met goede benadering zetten:

$$Z_{ac} = \frac{A}{2} \cdot d_{vl}\, c_{vl},$$

waarin $d_{vl} \cdot c_{vl}$ de specifieke impedantie is van het belastende medium. Wij zijn nu in staat het schema van fig. 4 te completeeren (zie fig. 6). Het merkwaardige is, dat dit schema niet op electrische weg is te verwezenlijken, omdat klossen een grootere weerstand hebben; electrotechnisch gesproken, de kringqualiteit $Q = \frac{\omega L}{R}$ is voor kwarts veel grooter dan voor normale kringen ($Q = 100\,000$ voor vrij

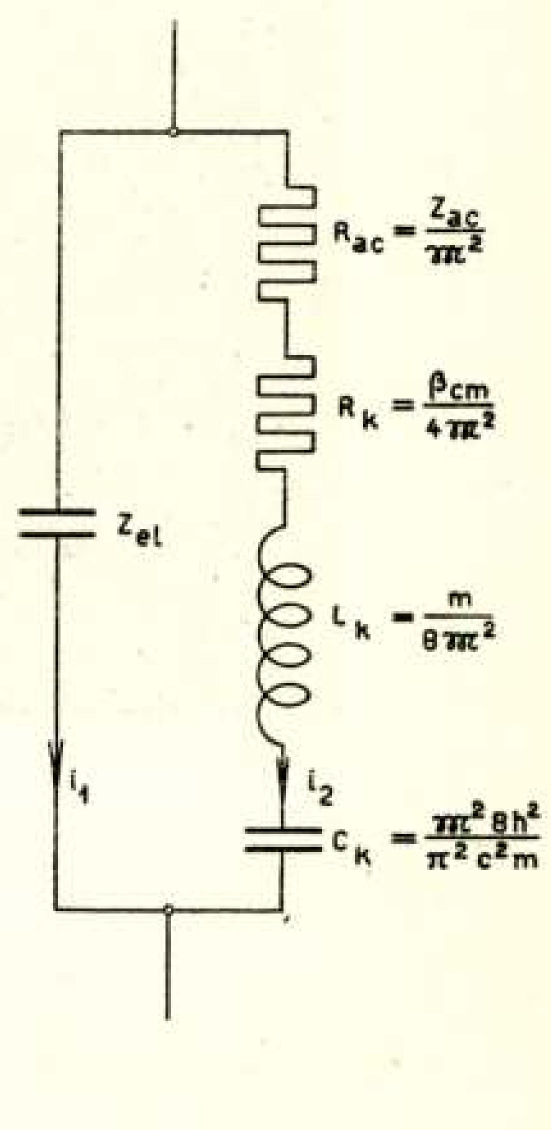


Fig. 6. Uitgewerkt electrisch vervangingsschema van het met een acoustische impedantie belaste trillende kwarts in de buurt van de eerste resonantie.

kwarts, $Q = 300$ voor normale kring, $Q = \pm 30$ voor kwarts in olie). Ook is het niet mogelijk klossen te wikkelen, die bij de hier gegeven L_k een zoo kleine C bezitten.

Numeriek voorbeeld (alles in Giorgi-eenheden).

Voor kwarts bedraagt: $E = 8{,}546 \,.\, 10^{10}$ Newton/m^2

$d = 2650$ kg/m^3

$q = 2{,}12 \,.\, 10^{-12}$ Coul/Newton

$c = 5760$ m/sec.

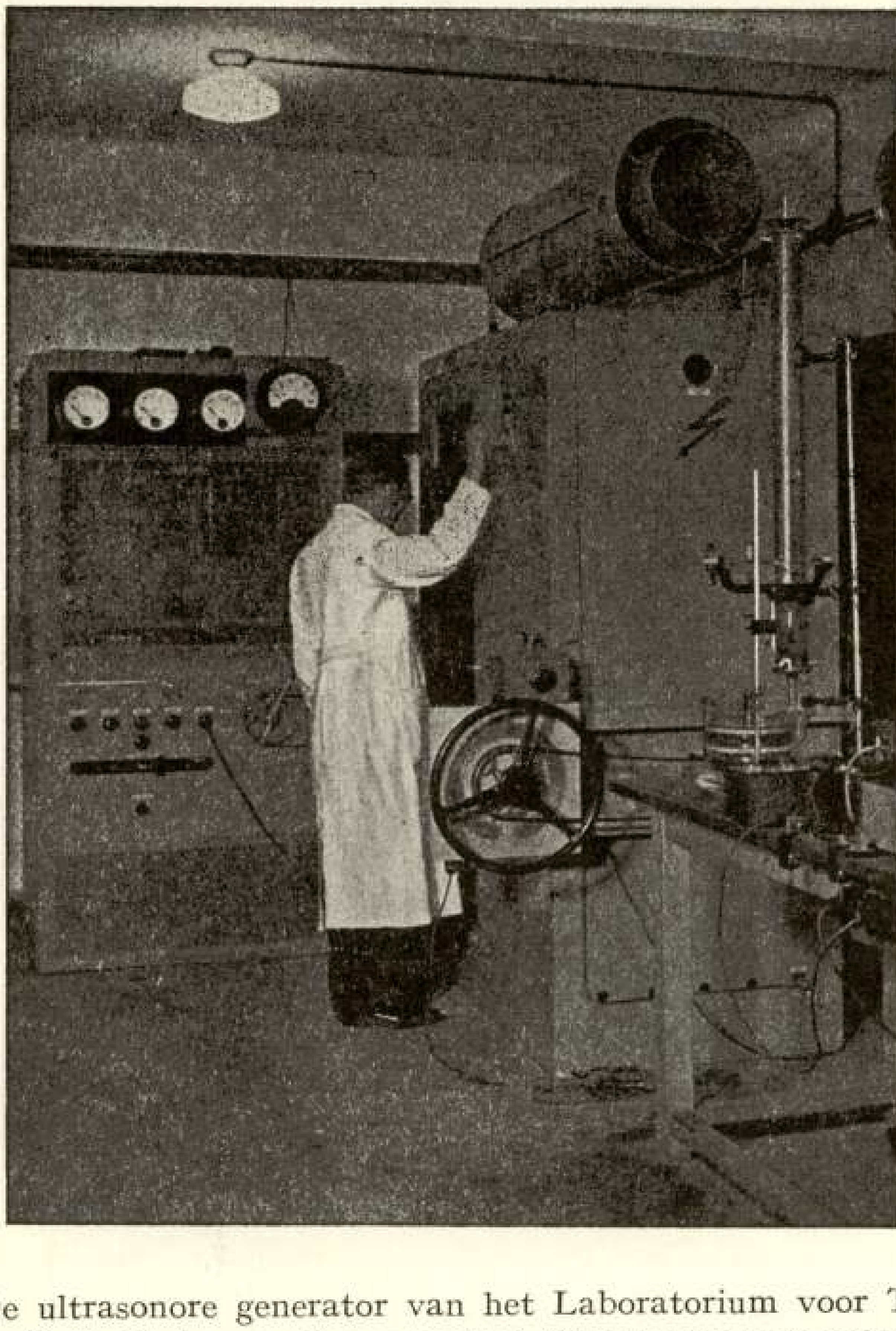


Fig. 7. De ultrasonore generator van het Laboratorium voor Technische Physica te Delft. Links: voedingsapparaat. Midden: generator, de frequentie wordt juist geregeld. Het wiel met kettingoverbrenging dient voor de instelling van de intensiteit. Rechts: kwarts in oliebad; de sonde voor de stralingsdrukmeting bevindt zich in het oliebad (vergl. fig. 12).

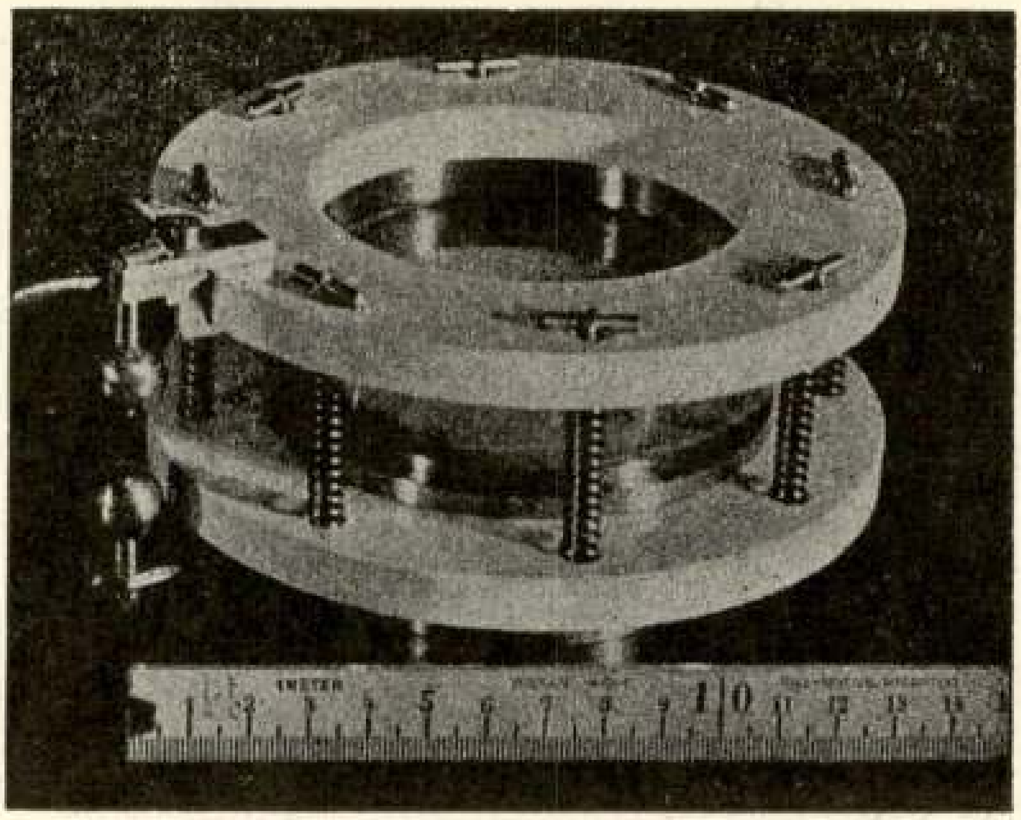


Fig. 8. Kwartskristal in houder, geschikt voor het uitstralen van ongeveer 1 kW acoustische energie. Daar zich onder het kwarts een luchtkamer bevindt wordt alleen naar boven energie afgegeven.

Het kwarts van de ultrasonore generator van het Laboratorium voor Technische Physica heeft de gegevens:

$$A = 71.10^{-4}\ \mathrm{m}^2$$

$$h = 0{,}013\ \mathrm{m}$$

$$C_{el} = 30.10^{-12}\ \mathrm{Farad}$$

Met deze gegevens berekenen wij: $\nu = 220\ \mathrm{kHz}$.

$$\mathcal{M} = 0{,}099\ \mathrm{Coul/m} = 0{,}099\ \mathrm{Newton/Volt}$$

$$L_k = 3{,}1\ \mathrm{Henry};\ C_k = 0{,}17.10^{-12}\ \mathrm{Farad}.$$

Verder is voor olie: $d_{vl} = 920\ \mathrm{kg/m}^3$; $c_{vl} = 1300\ \mathrm{m/sec}$. waaruit: $R_{ac} = 0{,}43.10^6$ Ohm.

R_k is hiertegenover te verwaarloozen.

Men meet de impedantie van het kwarts onder verschillende omstandigheden om de elementen van het schema ieder apart te kunnen berekenen. Z_{el} volgt uit een statische meting. Z_{ac} uit het verschil van de impedanties van het kwarts in olie of in lucht. R_k door een impedantiemeting in resonantie, L_k en C_k uit het impedantieverloop rondom de eigenfrequentie van het kwarts.

Zijn alle elementen bekend, dan kan men het rendement van de opstelling, de aanpassing aan de hoogfrequente generator en alle

andere wetenswaardigheden volgens de regels der electrotechniek berekenen.

Bijvoorbeeld blijkt, dat bij toenemende dikte van de kwartsplaat de nuttige i_2 (fig. 6) relatief kleiner wordt ten opzichte van i_1 en dat bovendien de nuttige weerstand R_{ac} minder snel aangroeit dan R_k. Tegenover het hieruit blijkende voordeel van dunne plaatjes staat het nadeel, dat bij een dunne plaat de trillingsamplitude der eindvlakken kleiner is bij eenzelfde maximaal toegelaten mechanische spanning.

§ 6. Het kristal wordt geschakeld zooals b.v. aangegeven in fig. 9 (Meissner-schakeling) en in een vloeistof geplaatst. De intensiteit is van de orde 10 Watt/cm², gewoon geluid van 60 phoon heeft een intensiteit van 10^{-10} Watt/cm², zoodat bij gebruik van ultrasonore golven effecten kunnen worden verwacht, die bij gewoon geluid nooit zijn waargenomen.

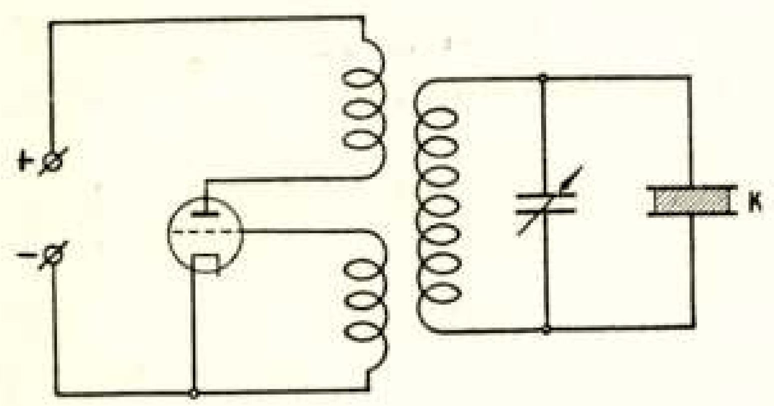


Fig. 9. Principe-schema van een Meissner oscillator. De spanning op het kwarts K bedraagt 20 000 V.

Het vloeistofoppervlak gaat bol staan, soms vormt zich een kegel, Wood en Loomis slaagden erin vischjes te dooden, een van een insnoering voorziene glasstaaf smelt op de plaats van de insnoering weg. Olie op een glasstaaf zittend vertoont ringen per analogie aan de proef van Kundt. Ultrasonore staande golven zijn zoowel in gassen en vloeistoffen als in vaste stoffen gemakkelijk met de schlierenmethode zichtbaar te maken.

Voor de uitmeting van het veld kan men gebruik maken van de stralingsdruk, gegeven door de formule:

$$P_{str} = 2\,u \cos^2 \Theta,$$

waarbij u de energiedichtheid is in de voortgaande golf. De pon-

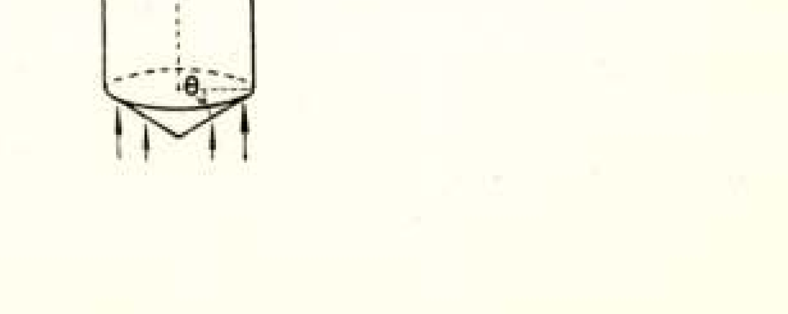
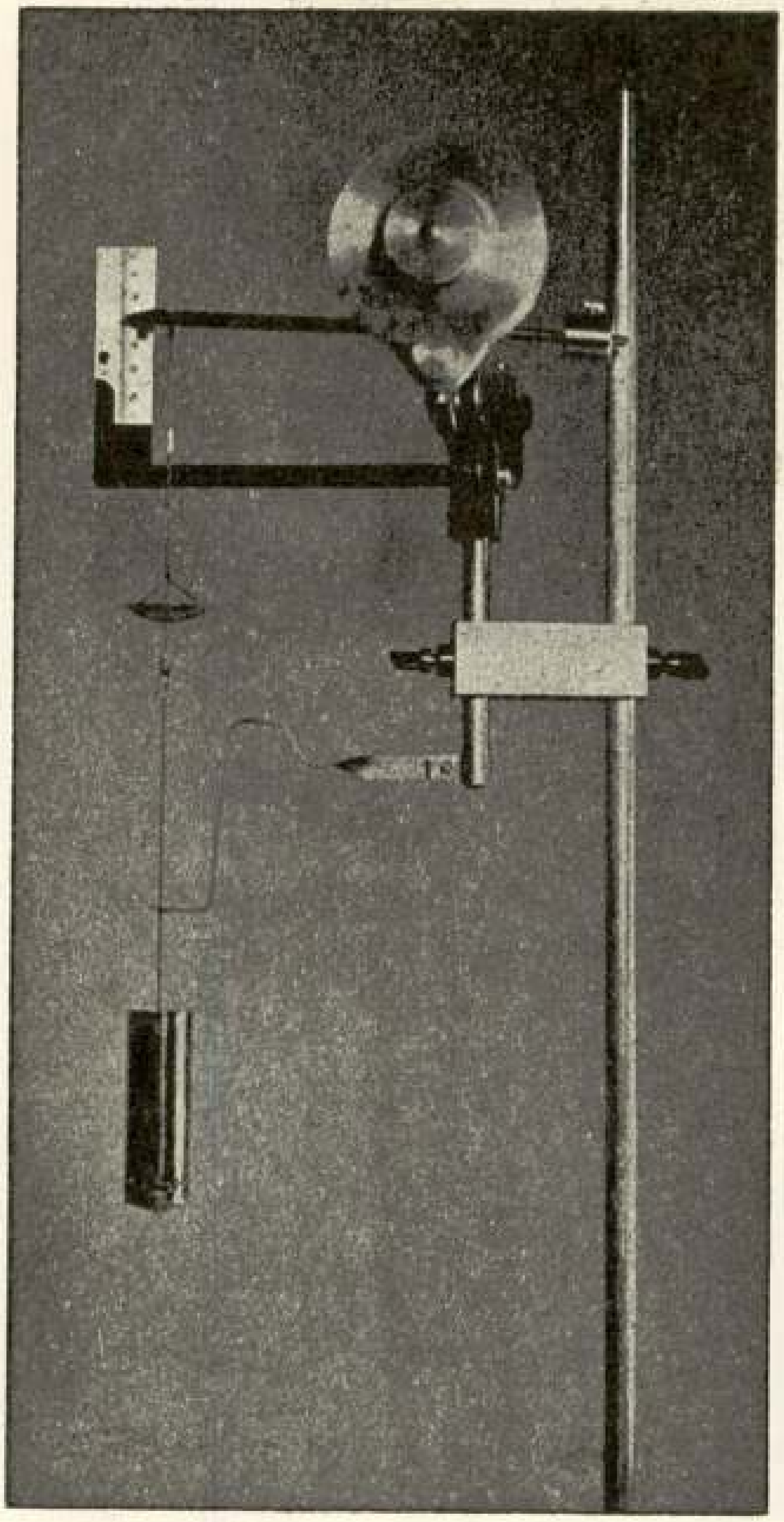


Fig. 10. Het meten van de ponderomotorische kracht met torsiebalans. De sonde is kegelvormig teneinde het optreden van staande golven te voorkomen.

deromotorische kracht wordt gemeten met een torsiebalans. De stralingsdruk is van de orde van 1 cm waterhoogte. Ook andere, in de acoustiek gebruikte, meetmethoden laten zich in het ultrasonore gebied toepassen. De interferometerproef van Kundt en de intensiteitsmeting door middel van de afkoeling van een gloeidraad (anemometer) zijn ook in de ultra-acoustiek zeer gebruikelijk. Men bezigt ook piëzo-electrische sondes, waarbij gebruik wordt gemaakt van de groote gevoeligheid van seignettezout.



§ 7. Interessant is de buigingsmethode, door D e b y e in 1932 ingevoerd. Men zet een vloeistofbad boven het trillende kristal, waardoor in de vloeistof staande golven ontstaan met periodiek op el-

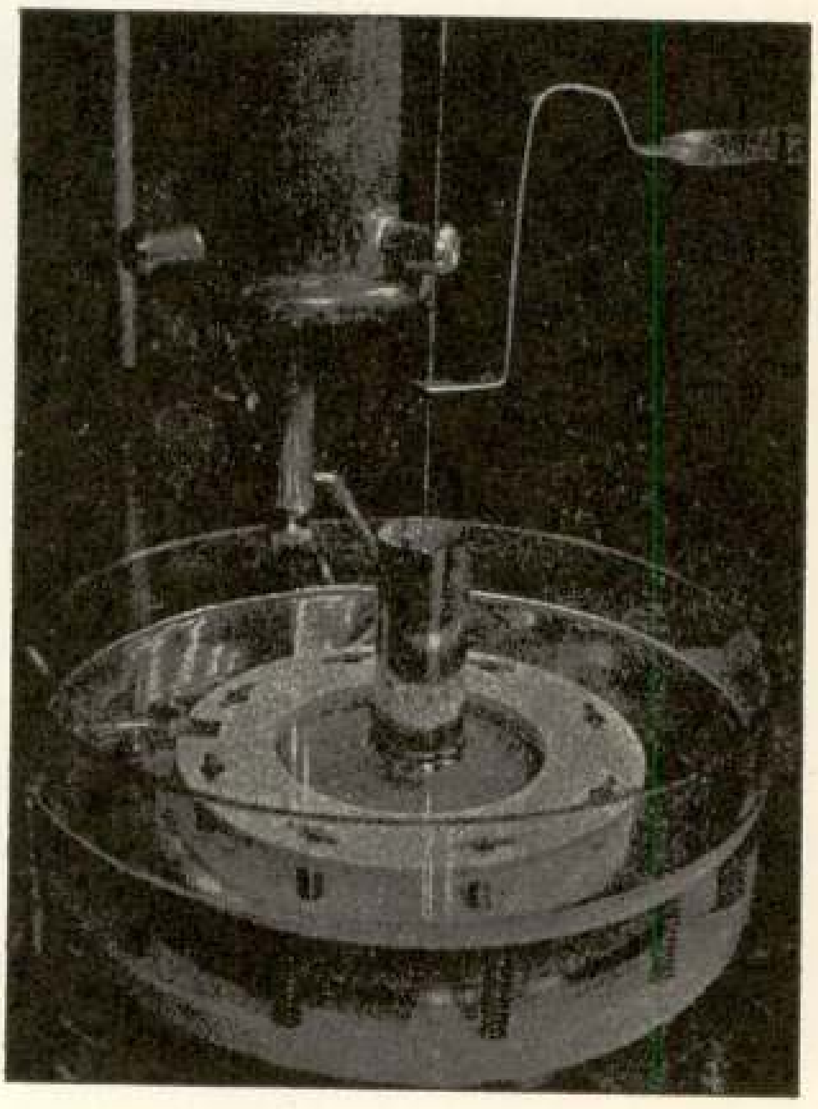


Fig. 11. Uitvoering van de torsiebalans volgens fig. 10. Bij het meten wordt de wijzer met een torsiekop weer in de nulstand gebracht, zoodat altijd op hetzelfde niveau wordt gemeten.

Fig. 12. Deze figuur toont hoe de reflector boven het kristal in de olie hangt.

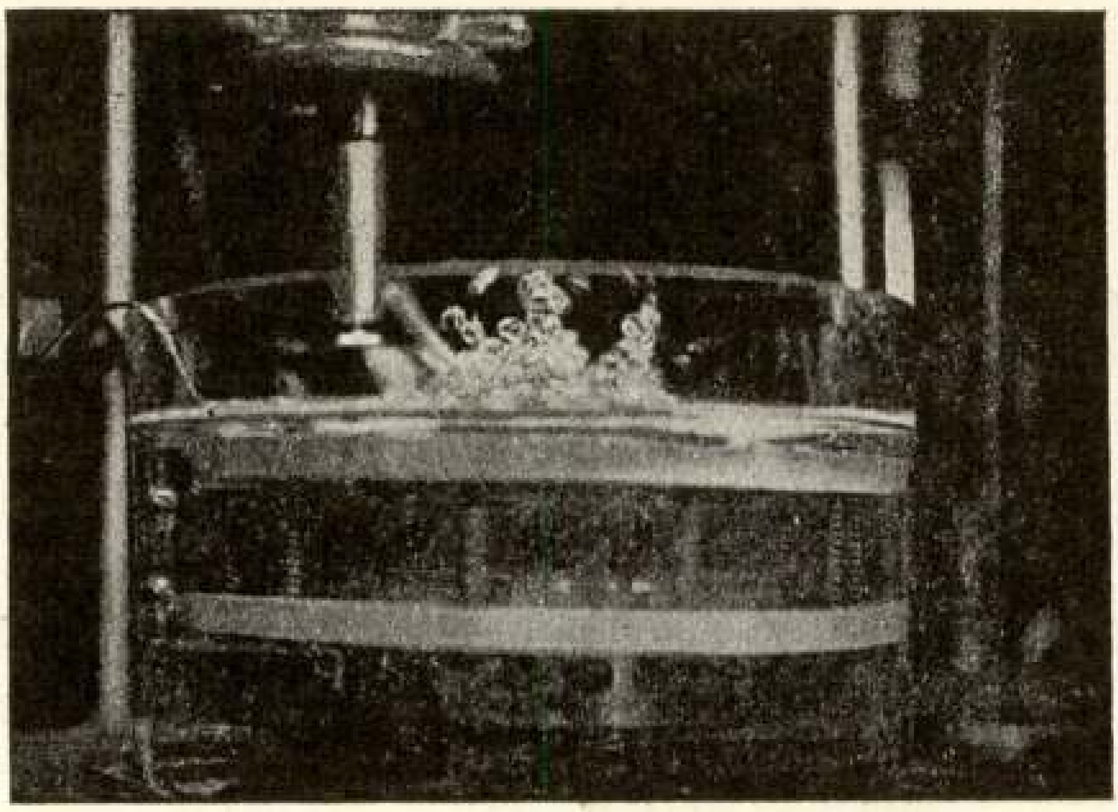


Fig. 13. Oliefontein boven trillend kwartskristal.

kaar volgende verdichtingen en verdunningen. Deze periodieke toestandsverandering van het materiaal is te gebruiken als optisch rooster, waarmee men buigingsspectra kan opwekken, zichtbaar onder en boven de centrale brandlijn F (fig. 14). Omdat het buigingsrooster 2ν keer per seconde verdwijnt is het licht van het

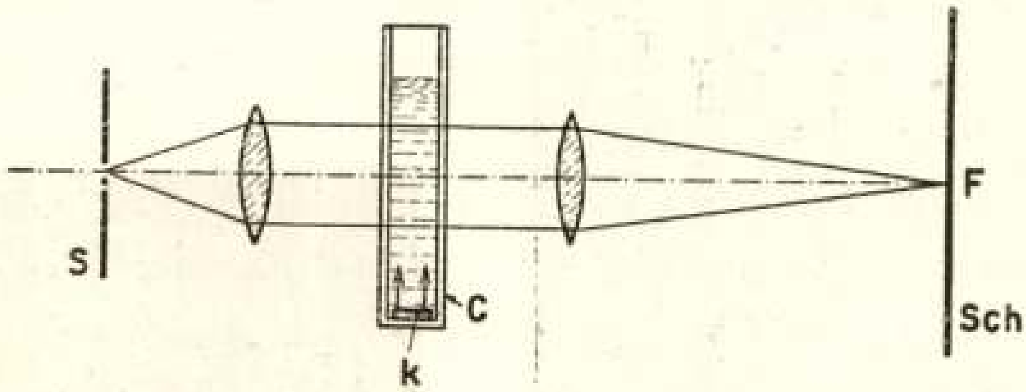


Fig. 14. Ultrasonore golven als optisch rooster. De buigingsbeelden van de spleet S worden op het scherm afgebeeld. De evenwijdige bundel passeert de vloeistof in het cuvet C, waarin het kristal K ultrasonore golven opwekt.

buigingsbeeld gemoduleerd met de dubbele geluidsfrequentie, waarmee in principe een stroboscoop is ontstaan, b.v. toegepast voor phosphorescentiemetingen.

Moduleert men de intensiteit van het ultrasonore veld, dan moduleert men ook de intensiteit van het afgebogen licht. De ultrasonore cel vervangt daarom de Kerr-cel als modulator van een lichtstraal en vindt deswege, naast de laatste, toepassing voor televisie-ontvangers (Scophony).

Uit de afstanden in het buigingsbeeld kan men omgekeerd de golflengte der ultrasonore golven berekenen en daaruit weer de elastische constanten, zoowel van isotrope als van anisotrope doorzichtige stoffen. De methode laat zich zeer nauwkeurig met kleine monsters uitvoeren. Het mechanisch kristalonderzoek, dat sinds de tijd van Voigt vrijwel gerust had, is daardoor in een nieuwe periode van ontwikkeling gekomen.

Dat een medium, waarin staande golven zijn opgewekt, als optisch tralie fungeert, is een gevolg van de variatie van de brekingsindex n met de spanning σ. De invloed op n is echter verschillend voor de twee hoofdpolarisatierichtingen van het doorgezonden licht: de stof is dubbelbrekend. De z.g. elasto-optische constanten geven het verband aan tusschen de dubbelbreking en de spanning. Door intensiteitsmetingen in het buigingsbeeld bij gebruik van al of niet gepolariseerd licht is men in staat de elasto-optische constanten op elegante wijze te bepalen.

Van groot physisch belang zijn de interferometerproeven in gassen en vloeistoffen, waarbij men de golflengte en de extinctiecoëfficient in het medium meet als functie van de frequentie. Het is daarbij gebleken, dat vele gassen dispersie vertoonen voor de ultrasonore golven, d.w.z. de snelheid neemt toe bij stijgende frequentie. Deze dispersie gaat gepaard met een aanzienlijke absorptie. Deze effecten worden daardoor verklaard, dat de intramoleculaire trillingen (oscillaties) eenige tijd noodig hebben om zich aan te passen aan de translatorische en rotatorische bewegingen, die door de met de verdichtingen en verdunningen gepaard gaande temperatuurwisselingen periodiek in energieinhoud op en neer gaan. Bij hoorbare frequenties komt de aequipartitie tusschen oscillaties en de uitwendige vrijheidsgraden in elke halve periode volkomen tot stand; overdruk, temperatuur en overdichtheid zijn met elkaar in fase. Bij zeer hooge ultrasonore frequenties doen de oscillatorische trillingen niet mee, overdruk en overdichtheid zijn ook dan met elkaar in fase. In het tusschengebied heeft na de verdichting een geleidelijke overdracht van energie plaats van de translaties naar de oscillaties. Er is hysterese tusschen druk en dichtheid, wat met energiedissipatie gepaard gaat.

§ 8. Van de technische toepassingen noemde ik al het gebruik van een trillende vloeistof als lichtmodulator in de televisie. Veel

belangrijker is het gebruik van ultrasonore golven in de onderwatersignaaltechniek. Men gebruikt hiervoor golven van betrekkelijk groote golflengte, die minder geabsorbeerd worden dan kortere golven. Omdat de hiervoor benoodigde dikke kristalplaten niet beschikbaar zijn, redt men zich door eenige kristalplaten op elkaar te bevestigen en door staalschijven aan de kwartskristallen vast te kitten.

Men is druk bezig toepassingen van de ultrasonore trillingen in

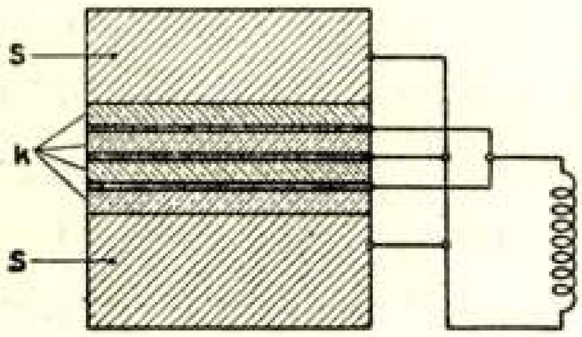


Fig. 15. Kwartszender voor onderwatersignaleering. De op elkaar gekitte kwartsplaten *K* zijn tusschen de stalen platen *S* geklemd teneinde de eigenfrequentie van het geheel te verlagen.

de geneeskunde te vinden. Inderdaad moet het mogelijk zijn weefselcellen van bepaalde grootte met uitgezochte frequenties kapot te doen trillen, zooals uit de ruwe proef van W o o d en L o o m i s met visschen reeds is gebleken. Als nuttige toepassingen heeft men gevonden, dat bepaalde geneesmiddelen door de ultrasonore trillingen door de huid heen dringen. Ook schijnt het, dat ischias en pneumonie doeltreffend zijn te bestrijden met ultrasonore trillingen.

Het gebied evenwel, waarop de meeste toepassingen zijn te verwachten, is dat der technologie van emulsies en suspensies. Het emulgeerend vermogen is te demonstreeren door een reageerbuis, die gedeeltelijk met kwik en voor de rest met water is gevuld, in het veld te houden. Het kwik wordt onmiddellijk in het water gedispergeerd en ook het omgekeerde treedt op, ofschoon dit niet te zien is.

Alle mogelijke beïnvloeding van de stabiliteit en dispersiteit van emulsies treden in het ultrasonore veld op. Soms wordt de emulsie fijner, soms grover, zelfs kan coagulatie optreden. In andere gevallen verandert de stabiliteit in gunstigen of ongunstigen zin, zonder dat de dispersiteit behoeft te veranderen.

Het is waarschijnlijk, dat bij deze verschijnselen allerlei physische processen tegelijk werkzaam zijn, zoodat het geheel een gecompliceerd karakter krijgt. Komt een druppel met een van zijn capillariteitstrillingen in resonantie met het ultrasonore veld, dan zal hij uiteenvallen in kleinere druppeltjes, waardoor de dispersiteit toe-

neemt. Omgekeerd bestaat ook een coaguleerende werking, doordat kleinere druppeltjes beter worden meegesleurd door de mechanische trilling dan grovere. De grovere kunnen dus de kleinere opvangen; de dispersiteit neemt af.

Wanneer de stabiliteit varieert bij constante dispersiegraad, moet dit toegeschreven worden aan de verwijdering van bepaalde capillair-actieve lagen, die op de druppels van het dispersoid geadsorbeerd waren. De hierdoor optredende verandering in de oppervlaktespanning en misschien ook colloid-electrische werkingen hebben een verandering van de stabiliteit tengevolge. Er zijn nog meer processen denkbaar. De sterke drukvariaties zullen de oplossingsevenwichten voortdurend verstoren, waardoor diffusie moet optreden. De dynamische toestand kan zeer veel verschillen van de statische. Bij andere processen werkt het ultrasonore veld katalytisch. Onder anderen komen de in gesmolten glas of metaal opgeloste gassen onmiddellijk vrij bij de bestraling van de smelt met ultrasonore golven.

Eenige van de hier genoemde processen treden bij zeer bepaalde frequenties op. Zoo zal het kapottrillen van druppeltjes een zeer selectief effect zijn. Ook voor de coagulatie van kleinere partikels aan grootere is een zeker verband noodig tusschen de massaverschillen der beide druppelsoorten en de frequentie. Voor andere elementaire processen (vrijkomen van gas, cavitatie) zijn bepaalde minimale veldintensiteiten noodig.

Het gevolg van een en ander is, dat men elk technologisch geval op zichzelf zal moeten bestudeeren. Lukraak gedane proeven zullen weliswaar altijd een of ander merkwaardig effect opleveren, echter slechts bij toeval het gezochte en een verdiept inzicht zal daardoor niet kunnen ontstaan. De gecompliceerdheid der verschijnselen zal vergen, dat men het systematische onderzoek aanvangt met de studie van de meest eenvoudige systemen en daarbij vooral quantitatieve metingen uitvoert. Ik meen wel te mogen zeggen, dat hier nog een groot stuk technische physica braak ligt.

LITERATUUR:

A. Scheibe, Piëzoelektrizität des Quarzes. Verlag Steinkopff, Dresden 1938.

P. Vigoureux, Quartz Resonators and oscillators. H. M. Stationary Office. London 1931.

E. Hiedemann, Ultraschallforschung. Walter de Gruyter en Co., Berlin 1939.

L. Bergmann, Der Ultraschall. V.D.I. Verlag. Berlin 1939.

Delft, Laboratorium voor Technische Physica.

Discussie.

Dr. J. d e B o e r: De te gebruiken frequentie bij echopeiling onder water wordt eenerzijds bepaald door de absorptie, waardoor wordt zij aan de lage zijde bepaald?

Prof. Z w i k k e r: De golflengte mag niet te groot worden, opdat het richteffect behouden blijft, wat onder meer van belang is voor de geheimhouding. De gebezigde frequenties liggen in de buurt van 30.000 Hz.

Ir. V. C o h e n H e n r i q u e z: De gegeven benadering voor $Z_{kristal}$ is slechts geldig in de onmiddellijke omgeving van de eerste resonantie. Hoe is het vervangingsschema voor frequenties, die meer van de resonantiefrequentie afwijken?

Z w.: De afgeleide impedantie wordt in het complexe vlak voorgesteld door een spiraal, terwijl de benadering wordt voorgesteld door een rechte lijn evenwijdig aan de *Im*-as. Dergelijke benaderingen zijn dus geldig rondom

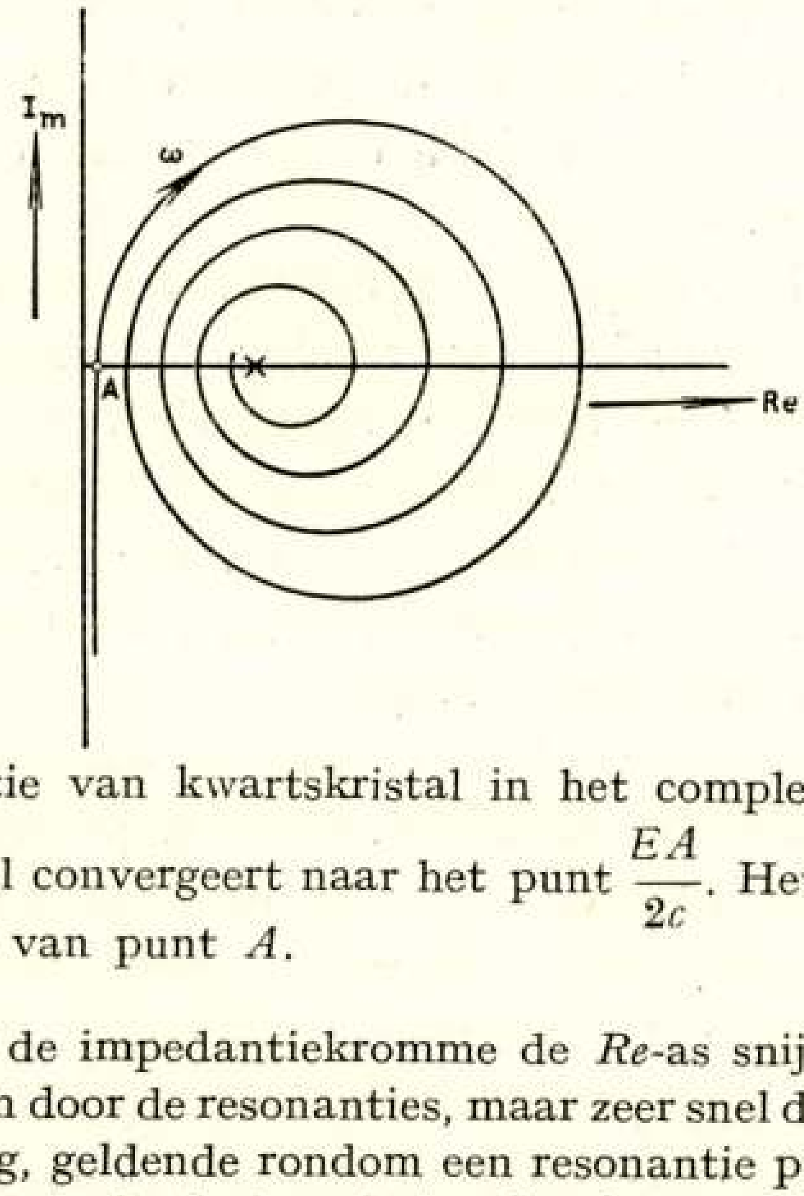


Fig. 16. Impedantie van kwartskristal in het complexe *Z*-vlak (zie formule 6). De spiraal convergeert naar het punt $\frac{EA}{2c}$. Het schema van fig. 6 geldt in de buurt van punt *A*.

alle punten, waar de impedantiekromme de *Re*-as snijdt. Nu loopt ω betrekkelijk langzaam door de resonanties, maar zeer snel door de anti-resonanties. De benadering, geldende rondom een resonantie punt, is daarom over een betrekkelijk groot ω-traject aan te houden, b.v. van $\frac{1}{4}$ $\Delta\omega$ onder ω_{res} tot $\frac{1}{4}$ $\Delta\omega$ boven ω_{res}, wanneer $\Delta\omega$ het ω-verschil is tusschen 2 opeenvolgende resonanties.

Ir. B. D. H. T e l l e g e n: De afgeleide formule voor $Z_{kristal}$ lijkt mij overeen te komen met die voor de electrische impedantie van een kabel van eindige lengte. Is dat het geval?

Z w.: Dat is inderdaad het geval. Mathematisch zijn de beide gevallen identiek te behandelen. Het zijn bijzondere gevallen van de algemeene vierpooltheorie.

De toepassing van kwartskristallen ten behoeve van de frequentiestabiliteit in zenders en ontvangers

door J. K. Schouten

A. De toepassing van kwartskristallen in zenders

I. *Inleiding*

Toen men omstreeks 1924 begon in te zien, dat met korte golven van b.v. 30 m golflengte gunstiger resultaten konden worden verkregen dan met de toen gebruikelijke golven van b.v. 10 km golflengte, bestond het bezwaar, dat deze hooge frequenties niet voldoende constant bleven. Een oplossing werd hiervoor gevonden door den zender piëzo-electrisch te besturen. Reeds in 1921 was dit principe aangegeven door Cady [1]), doch het werd eerst toegepast, nadat men het belang hiervan voor kortegolfzenders en later ook voor omroepzenders had ingezien. De kortegolf-telefoniezender PCJ van Philips, waarmede in Maart 1927 voor het eerst in Indië telefonieontvangst uit Nederland mogelijk werd, was kristalgestuurd.

Door de toepassing van kristalsturing kan betrekkelijk eenvoudig een frequentiestabiliteit verkregen worden, die op een andere wijze nog niet te bereiken is, vooral indien men de kristallen temperatuurongevoelig maakt door ze in thermostaten te plaatsen of door gebruik te maken van bepaalde kristalsneden met een zeer lage temperatuurcoëfficient.

Uiteraard is kristalsturing beperkt tot zenders, die op één of verschillende vaste frequenties werken. Een geringe frequentieregeling, b.v. door variatie der luchtspleet tusschen kristal en electrode, is mogelijk en kan bij speciaal voor dit doel vervaardigde kristallen (z.g. variokristallen) ongeveer 3,5 $^0/_{00}$ bedragen. Dit gaat dan echter om verschillende redenen ten koste van de frequentiestabiliteit. Continue regeling over een grooter gebied kan verkregen worden door het mengproduct, dus de som- of verschilfrequentie,

te gebruiken van een vast signaal van een hooge frequentie, afkomstig van een kristalgestuurden oscillator, en van een in frequentie continu regelbaar signaal van een lage frequentie. De stabiliteit wordt dan voornamelijk bepaald door het verloopen van deze lage frequentie.

In verband met de verschillende toepassingen van kristalgestuurde zenders gelden bij de vervaardiging van kristallen en kristalhouders dikwijls zeer uiteenloopende overwegingen. In het algemeen zal men bij vaste zenders, zooals omroepzenders, bakenzenders, enz., aan hooge eischen van frequentiestabiliteit kunnen voldoen door het kristal in een thermostaat te plaatsen, die de temperatuur binnen zeer enge grenzen constant houdt. Dit was vooral noodig, voordat men kristallen met zeer lage temperatuurcoëfficient kende, doch ook bij kristallen met een temperatuurcoëfficient nul is een thermostaat noodig, daar deze temperatuurcoëfficient slechts geldt voor een klein temperatuurgebied. De bedrijfstemperatuur dient dan ook in dit gebied te vallen en wordt tusschen de 50°C en 60°C gekozen. Hierdoor wordt het kristal tevens vrij van vocht gehouden, een niet gering voordeel, daar vocht en in het algemeen elke verontreiniging een nadeelige invloed op het oscilleeren heeft. De thermostaten zijn betrekkelijk groot en zwaar (binnen- en buitenthermostaat), wat bij bovengenoemde zenders geen bezwaar zal opleveren. Bij mobiele zenders echter speelt het gewicht en het volume een belangrijke rol. Bij vliegtuigzenders b.v. komt hier nog bij, dat de zender onderhevig is aan trillingen, terwijl groote verschillen in temperatuur en druk kunnen optreden. De toepassing van kristallen met een zeer lage temperatuurcoëfficient gaf de mogelijkheid van kristalsturing bij vliegtuigzenders, daar hierbij een thermostaat niet zoo noodig is. Moeilijkheden werden echter ondervonden, wanneer in de koudere luchtlagen condensatie optrad en zich een ijslaagje op het kristal vormde [2]). Wanneer dan in de warmere luchtlagen het ijslaagje smolt, bleek dikwijls oscilleeren niet meer mogelijk. Verbetering werd gevonden door het kristal in een vacuumhouder te monteeren. Tegen het trillen wordt het kristal ingeklemd. Kristalsturing in vliegtuigzenders wordt voornamelijk in Amerika toegepast. In Europa worden meestal continu regelbare frequentiegebieden gewenscht, terwijl door een stijve constructie en met behulp van compensatiemiddelen een voldoende frequentiestabiliteit te verkrijgen is zonder kristal.

Mede door het toenemende aantal zenders zijn de eischen voor frequentiestabiliteit steeds hooger geworden. Richtlijnen hiervoor worden gegeven door het C.C.I.R. (Comité Consultatif International des Radiocommunications). Zoo is men in 1938 te Cairo, b.v. voor de tolerantie der frequentie voor omroepzenders, overeengekomen, dat deze zal bedragen 50 Hz voor golflengten van 30 km tot 187,5 m en 0,1 ‰ voor golflengten van 187,5 m tot 10 m. Voor na 1 Jan. '40 in bedrijf te stellen zenders en na 1 Jan. '44 voor alle bestaande zenders zal dit worden 20 Hz respectievelijk 0,05 ‰. In de practijk moet dikwijls aan aanmerkelijk zwaardere eischen worden voldaan. Zoo bedraagt de tolerantie voor omroepzenders wel 1—5 Hz bij een frequentie van 1000 kHz, overeenkomende met een frequentiestabiliteit van $1-5.10^{-6}$. De grens der mogelijke frequentiestabiliteit wordt bepaald door de meetnauwkeurigheid, welke meer dan 10^{-7} bedraagt.

II. *Het electrische vervangingsschema van een kristal*

Het vervangingsschema (I) van een kristal, zooals dit in fig. 1 wordt weergegeven, bestaat uit de serieschakeling van een zelfinductie L_k, een capaciteit C_k en een weerstand R_k, met parallel hieraan een capaciteit C_p, die voornamelijk gevormd wordt door de houder- en bedradingscapaciteit.

Vergeleken met een uit spoelen en condensatoren samengestelde schakeling is de demping buitengewoon gering, terwijl L_k groot en C_k klein is. Hierop is het eerst in 1926 gewezen door Van der Pol [3]). Zoo kan b.v. voor een kristal (A.T.-snede) met een eigenfrequentie van 1500 kHz, $L_k = 0{,}12$H en $C_k = 0{,}1$pF zijn, terwijl de kwaliteitsfactor $Q_k = \omega_s' L_k/R_k$, voor in lucht trillende kristallen, 10 à 20 000 kan bedragen. Voor een „gewone'' kring is $Q \approx 200$. C_p is 10 à 30 pF. Voorts zijn de vervangingswaarden, vooral wanneer het kristal temperatuurongevoelig gemaakt is, zeer constant.

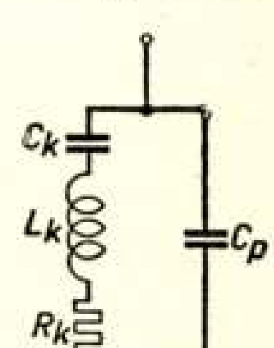


Fig. 1. Het vervangingsschema (I) van een kristal.

Voor een gegeven kristalsnede geldt bij benadering voor de diktetrilling:

$$L_k . O . f^3 = K_1 \tag{1}$$

$$\frac{C_k}{O \, . \, f} = K_2 \qquad (2)$$

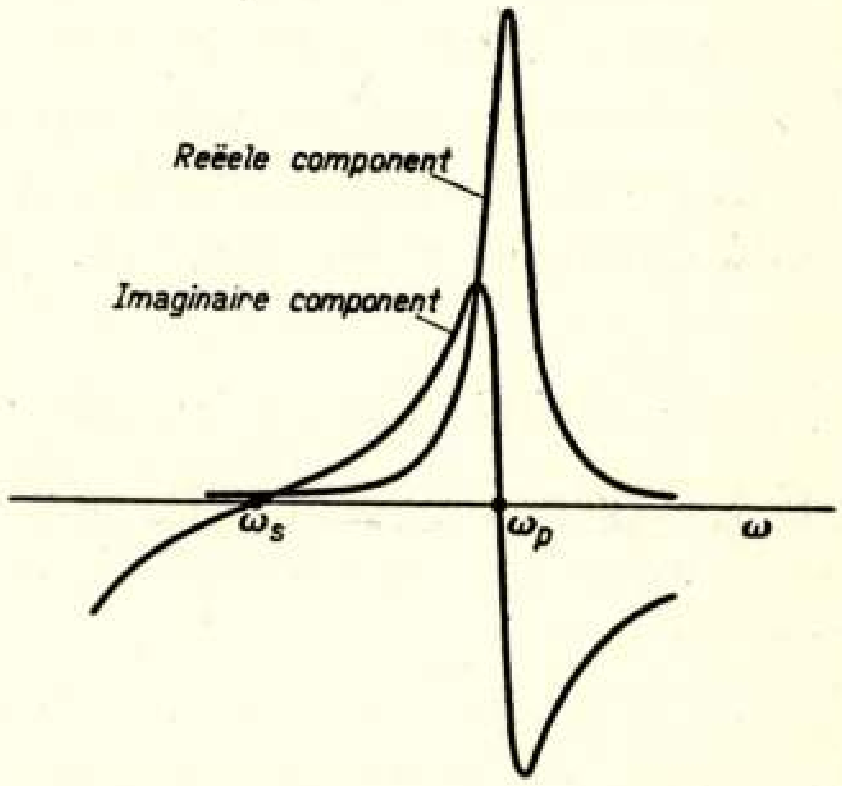
$$R_k . O \, . \, f = K_3 \qquad (3)$$

$$Q_k \, . \, f = K_4 \qquad (4)$$

Hierin is O de oppervlakte van het kristalplaatje en $f = \omega_s/2\pi$ de eigenfrequentie van het kristal. K_1, K_2, K_3 en K_4 zijn constanten, die van de kristalsnede afhangen [4]).

Fig. 2 geeft de reëele en de imaginaire component van de impe-

Fig. 2. De reëele en imaginaire component van de kristalimpedantie als functie van de frequentie. Voor $\omega = \omega_s$ bestaat serieresonantie, voor $\omega = \omega_p$ parallelresonantie.



dantie van het kristal als functie van de frequentie. Men onderscheidt twee resonantiefrequenties, waarvoor dus de impedantie reëel is. Bij parallelresonantie ($\omega = \omega_p$) heeft de impedantie een hooge waarde, terwijl bij serieresonantie ($\omega = \omega_s$) de impedantie een lage waarde heeft.*) Men noemt $\omega_s/2\pi$ de eigenfrequentie van het kristal. Daar een kristal meer dan één eigenfrequentie bezit, is de geldigheid van het vervangingsschema beperkt tot een bepaald frequentiegebied. De resonantiefrequenties worden gegeven door:

$$\omega_s = \frac{1}{\sqrt{L_k \, . \, C_k}} \qquad (5)$$

en

*) De parallelresonantie is de resonantiefrequentie van het kristal, als de electroden open zijn; de serieresonantie is de resonantiefrequentie bij kortgesloten electroden (vergelijk fig. 1).

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{L_k \, . \, C_k}} \sqrt{\frac{C_k + C_p}{C_p}} \approx \omega_s \left(1 + \frac{C_k}{2C_p}\right), \tag{6}$$

daar $C_k \ll C_p$.

We zien, dat ω_s alleen door de kristalgrootheden bepaald wordt, terwijl ω_p bovendien nog afhankelijk is van C_p, dus van de houder- en bedradingscapaciteit. Voorts blijkt nog, dat bij toenemende parallelcapaciteit ω_p tot ω_s nadert.

Het kan soms gewenscht zijn het kristal vervangen te denken door een vervangingsschema (II) volgens fig. 3. De beide vervangingsschema's zijn identiek, indien:

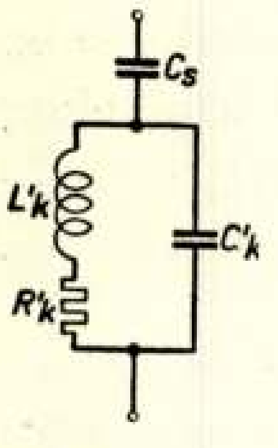


Fig. 3. Het vervangingsschema (II) van een kristal.

$$L_k' = \frac{L_k}{p^2} \tag{7}$$

$$C_k' = p^2 \frac{C_p \, . \, C_k}{C_p + C_k} \tag{8}$$

$$R_k' = \frac{R_k}{p^2} \tag{9}$$

$$C_s = C_k + C_p \tag{10}$$

$$\text{waarin: } p^2 = \left(\frac{C_k + C_p}{C_k}\right)^2 \tag{11}$$

Zij $\omega_k'/2\pi$ de eigenfrequentie en Q_k' de kwaliteitsfactor van den parallelkring, dan blijkt:

$$\omega_k' = \omega_p$$

$$Q_k' \approx Q_k.$$

Vergeleken met een „gewone" kring is dus weer Q_k' zeer groot, maar nu is L_k' klein en C_k' groot. Is $C_p = 30$ pF, dan is, voor bovengenoemde waarden van L_k en C_k, $L_k' = 1{,}2\ \mu$H en $C_k' = 10^4$ pF.

We noemen $R = \frac{L_k'}{R_k' \, . \, C_k'}$ de sperweerstand van het kristal; dit is de waarde van de impedantie bij $\omega \approx \omega_p$.

Uit de bovenstaande uitdrukkingen volgt:

$$R \approx \frac{K_1 \, . \, K_2}{K_3} \, . \, O \, . \, \frac{1}{f} \, . \, \frac{1}{C_p^2} \qquad (12)$$

Uit (12) blijkt, dat de sperweerstand van een kristal evenredig toeneemt met het oppervlak van het kristalplaatje en kwadratisch afneemt met de parallelcapaciteit.

III. *Oscillatorschakelingen*

a. De kristaloscillator volgens Pierce

In principe zijn vele oscillatorschakelingen mogelijk. Elke oscillatorschakeling is door het invoeren van een kristalelement te veranderen in een kristalschakeling. De meest voorkomende schakeling echter is wel die volgens Pierce [5, 6, 7, 8]), welke eenvoudig is en waarmede een zeer goede frequentiestabiliteit te verkrijgen is.

Fig. 4 geeft een gebruikelijk principeschema van deze schakeling weer, waarin voor het kristal het vervangingsschema (II) is ingevoerd. C_{ag} stelt de inwendige anode-roostercapaciteit van de buis voor.

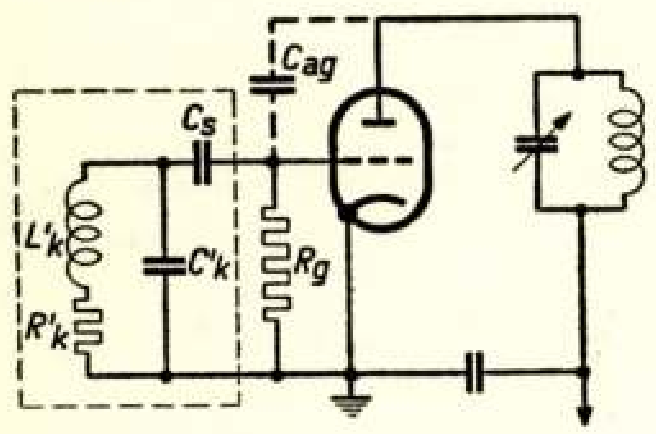


Fig. 4. Een gebruikelijk principeschema van den kristaloscillator volgens Pierce, waarin voor het kristal het vervangingsschema (II) is ingevoerd. C_{ag} stelt de inwendige anode-roostercapaciteit van de buis voor.

Wordt wisselspanning aan het rooster toegevoerd, dan zal roosterstroom gaan vloeien, welke gelijkrichting tengevolge heeft. Is de lekweerstand R_g groot t.o.v. $1/\omega C_s$ en groot t.o.v. de roosterkathodeweerstand van de buis, dan zal de door gelijkrichting ontstane negatieve roostergelijkspanning ongeveer gelijk zijn aan de amplitude van de roosterwisselspanning. Bij toename van de amplitude zal dus de negatieve roostergelijkspanning vergroot worden en dus de gemiddelde steilheid afnemen, waardoor de amplitude begrensd wordt. Bewezen kan worden, dat de weerstand, die parallel aan den kring aanwezig moet worden gedacht en dus als extra-demping van het kristal werkzaam is, dan $R_g/3$ bedraagt. Is verder $1/\omega C_s \ll L_k'/R_k'C_k'$, de sperweerstand van het kristal, dan is voor het gebied $\omega > \omega_s$ de kristalimpedantie bij benadering vervangen te denken door die van den parallelkring alleen.

We kunnen thans aan de hand van fig. 5 de oscillatievoorwaarden afleiden. De genoemde weerstand $R_g/3$ is verrekend te denken in den weerstand R_1, terwijl de inwendige weerstand van de buis verrekend is gedacht in den weerstand R_2. Zij S de gemiddelde steilheid, dan is (complexe waarden worden aangegeven door vette letters):

$$\mathbf{V}_a = -S\,\mathbf{V}_g \frac{(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_3)\,\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3} \tag{13}$$

en

$$\mathbf{V}_g = \frac{\mathbf{V}_a\,.\,\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_3}, \tag{14}$$

waarin $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$ en $\mathbf{Z}_3$ de impedanties zijn, zooals in fig. 5 is aangegeven.

Hieruit volgt de oscillatievoorwaarde:

$$1 = -\frac{S\,.\,\mathbf{Z}_1\,.\,\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3}.$$

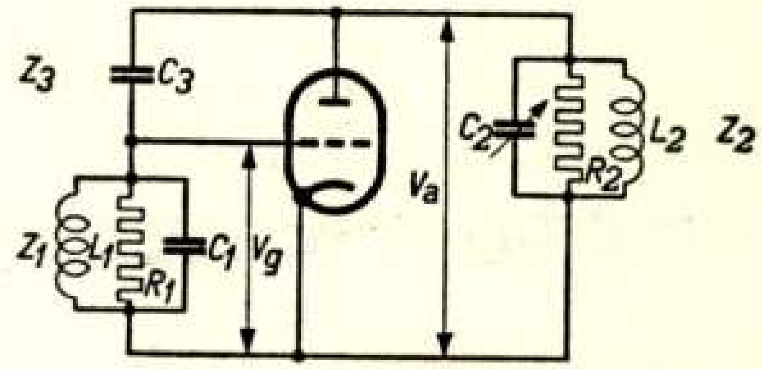


Fig. 5. Het vereenvoudigde principeschema van den kristaloscillator volgens Pierce.

Voeren we de admittanties $\mathbf{Y} = 1/\mathbf{Z}$ in, dan is:

$$(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_3)\,(\mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3) - \mathbf{Y}_3^{\,2} + S\,.\,\mathbf{Y}_3 = 0$$

of:

$$\mathbf{Y}_1'\,.\,\mathbf{Y}_2' - \mathbf{Y}_3^{\,2} + S\,.\,\mathbf{Y}_3 = 0, \tag{15}$$

waarin: $$\mathbf{Y}_1' = \frac{1}{R_1} + j\left\{\omega\,(C_1 + C_3) - \frac{1}{\omega L_1}\right\} = \frac{1}{R_1} + j\left(\omega\,C_1' - \frac{1}{\omega L_1}\right),$$

$$\mathbf{Y}_2' = \frac{1}{R_2} + j\left\{\omega\,(C_2 + C_3) - \frac{1}{\omega L_1}\right\} = \frac{1}{R_2} + j\left(\omega\,C_2' - \frac{1}{\omega L_2}\right),$$

$$\mathbf{Y}_3 = j\,\omega C_3.$$

Nu is: $\mathbf{Y}_1' \approx \dfrac{1}{R_1} + j\,.\,2\,C_1'\,(\omega - \omega_1)$,

waarin $\omega_1/2\pi$ de resonantiefrequentie van den roosterkring is.

Stel:
$$2\,C_1'\,(\omega - \omega_1) = -\frac{a}{R_1}.$$

Het blijkt, dat $a = -2\,Q_1 \,.\, v_1$, een vorm, die bij berekening van afgestemde kringen steeds voorkomt. Hierin is $v_1 = \frac{\omega - \omega_1}{\omega_1}$ de relatieve verstemming.

Dus: $$\mathbf{Y}_1{}' = \frac{1}{R_1}(1 - ja). \tag{16}$$

Verder is: $$\mathbf{Y}_2{}' \approx \frac{1}{R_2} + j\left\{2\,C_2{}'\,(\omega - \omega_1) + 2\,C_2{}'\,(\omega_1 - \omega_2)\right\},$$

waarin $\omega_2/2\pi$ de resonantiefrequentie van den anodekring is.

Stel: $$2\,C_2{}'\,(\omega_1 - \omega_2) = -\frac{\beta}{R_2}, \text{ dus } \beta = -2\,Q_2 \,.\, v_{12}.$$

Hierin is $v_{12} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_2}$ het relatieve verschil van de resonantiefrequenties van den roosterkring en den anodekring.

Na substitutie is: $$\mathbf{Y}_2{}' = \frac{1}{R_2}\left\{1 - j\left(\frac{C_2{}'R_2}{C_1{}'R_1}a + \beta\right)\right\}. \tag{17}$$

Tenslotte is: $$\mathbf{Y}_3 = j\omega C_3,$$

daar $\omega \approx \omega_1$, te vervangen door:

$$\mathbf{Y}_3 = j\omega_1 C_3. \tag{18}$$

Na substitutie van (16), (17) en (18) in (15) is:

$$aa^2 + (a' + jb')\,a + a'' + jb'' = 0, \tag{19}$$

waarin:
$$a = -\frac{C_2{}'R_2}{C_1{}'R_1}$$

$$a' = -\beta$$

$$a'' = 1 + \omega_1{}^2 C_3{}^2 R_1 R_2$$

$$b' = -\frac{C_2{}'R_2}{C_1{}'R_1} - 1$$

$$b'' = -\beta + \omega_1 C_3 R_1 R_2 S.$$

Door het reëele deel van (19) gelijk aan nul te stellen verkrijgt men:

$$a\alpha^2 + a'\alpha + a'' = 0$$

of:
$$\beta = \frac{1 + \omega_1{}^2 C_3{}^2 R_1 R_2}{\alpha} - \frac{C_2' R_2}{C_1' R_1}\,\alpha. \tag{20}$$

Deze uitdrukking geeft dus het verband tusschen de zich instellende frequentie (α) en de verstemming (β) van den anodekring t.o.v. de eigenfrequentie van den roosterkring. Fig. 6 geeft dit verband weer. We zien hieruit, dat naarmate β grooter is, α meer constant blijft en een kleine waarde heeft, d.w.z. dat bij groote verstemming van den anodekring t.o.v. de eigenfrequentie van het kristal de zich instellende frequentie practisch onafhankelijk is van deze verstemming en tot de parallelresonantiefrequentie van het kristal nadert. Uit de definitie van α volgt, dat $d\omega/d\alpha = -\omega_1/2Q_1$, waaruit blijkt, dat het voor een groote frequentiestabiliteit gunstig is, wanneer Q_1 zoo groot mogelijk, en dus de demping van het kristal zoo klein mogelijk is.

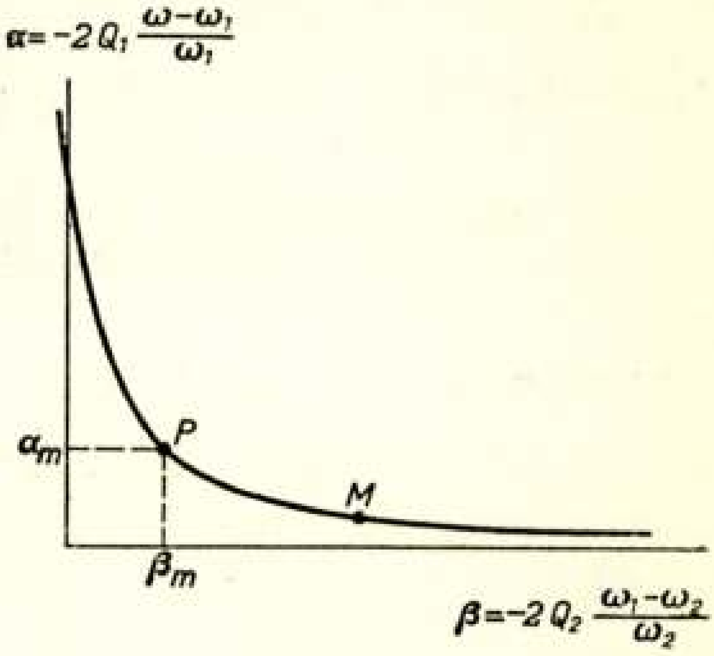


Fig. 6. De zich instellende frequentie ω, uitgedrukt in α, als functie van de verstemming van den anodekring, uitgedrukt in β. De instelling voor maximale oscillatieamplitude wordt gegeven door het punt P. In verband met de frequentiestabiliteit is een instelling bij grootere verstemming van den anodekring, b.v. gegeven door het punt M, gunstiger.

Door het imaginaire deel van (19) gelijk aan nul te stellen verkrijgt men:

$$b'\alpha + b'' = 0.$$

Substitueer hierin (20), dan volgt na uitwerken voor de benoodigde steilheid in den stationnairen toestand:

$$S = \frac{\alpha}{\omega_1 C_3 R_1 R_2} + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\omega_1 C_3 R_1 R_2} + \omega_1 C_3\right). \tag{21}$$

Hieruit blijkt, dat altijd $\alpha > 0$, d.w.z. dat de kristalimpedantie inductief moet zijn, terwijl gemakkelijk te bewijzen is, dat ook de anodeimpedantie inductief moet zijn.

De vorm (21) vertoont een minimum voor $\alpha = \alpha_m$. De gemiddelde steilheid is hierbij minimaal, wat overeenkomt met de maximale oscillatieamplitude. Verder blijkt uit (21), dat S kleiner is, naarmate R_1 grooter is. Voor een groote oscillatieamplitude moet dus de sperweerstand van het kristal hoog zijn.

Komt met $\alpha = \alpha_m$ overeen $\beta = \beta_m$, dan is, in aanmerking nemende dat $C_1' \gg C_2'$, aan te toonen dat $\alpha_m = \beta_m$. Voor maximale oscillatieamplitude is de toestand weergegeven door het punt P in fig. 6. Uit de figuur blijkt, dat deze instelling niet overeenkomt met maximale frequentiestabiliteit. Een gunstiger instelling wordt verkregen bij grootere verstemming van den anodekring, b.v. gegeven door het punt M.

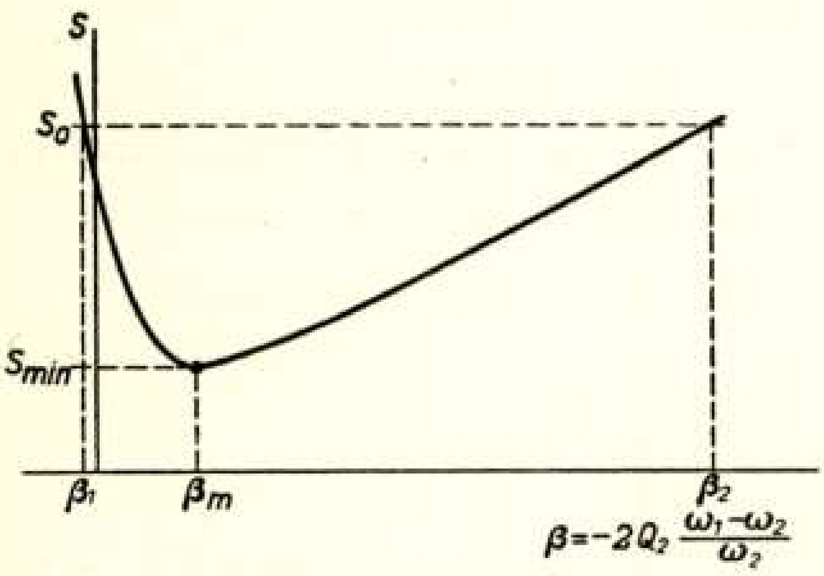


Fig. 7. De gemiddelde steilheid S als functie van de verstemming van den anodekring uitgedrukt in β. Bij een zekere geringe verstemming, gegeven door β_m, is de steilheid minimaal, wat overeenkomt met maximale oscillatieamplitude.

Uit (20) en (21) is grafisch te construeeren $S = f(\beta)$, wat in fig. 7 wordt weergegeven. Het gebied $\beta_1 > \beta > \beta_2$, waar aan de oscillatievoorwaarden wordt voldaan, wordt bepaald door de aanvangsteilheid S_0, aangezien $S < S_0$ zal zijn.

b. Conclusies en algemeene beschouwingen betreffende oscillatorschakelingen

Uit het voorgaande komen we tot de volgende conclusies:

1. Voor de frequentiestabiliteit als functie van de verstemming van den anodekring is groote verstemming gunstig. De demping van het kristal moet zoo gering mogelijk zijn.
   Behalve hierdoor wordt de frequentiestabiliteit gunstig beinvloed door het feit, dat de grootheden van het vervangingsschema van het kristal buitengewoon constant te houden zijn.
2. De frequentie komt ongeveer overeen met de parallelresonantiefrequentie van het kristal. De impedantie van het kristal en van den anodekring zijn bij de zich instellende frequentie inductief. Daar de frequentie van de parallelresonantie mede bepaald wordt

door de seriecapaciteit C_k en de parallelcapaciteit C_p, en laatstgenoemde niet onder alle omstandigheden constant is, is het voor een goede frequentiestabiliteit gunstig om C_k zoo klein mogelijk te houden, d.w.z. de oppervlakte van het plaatje niet te groot te kiezen, terwijl ook de keuze van de kristalsnede van invloed is. Frequentiecorrectie is dus mogelijk door verandering der luchtspleet of door verandering van C_p.
Het feit, dat de frequentie mede bepaald wordt door C_p, dus b.v. door de bedradingscapaciteit, wordt wel als nadeel van deze schakeling gevoeld en heeft geleid tot andere schakelingen, waarbij de frequentie niet bepaald wordt door de parallelcapaciteit.

3. Bij een bepaalde verstemming van den anodekring is de oscillatieamplitude maximaal. Deze instelling komt niet overeen met een gunstige frequentiestabiliteit.
Voor een groote oscillatieamplitude moet de sperweerstand van het kristal hoog zijn. Dit is te bereiken door C_p klein te houden en de oppervlakte van het plaatje groot te kiezen.

Nevenresonanties kunnen vooral bij hooge frequenties in sterke mate voorkomen. In de schakeling volgens Pierce zal in het algemeen oscilleeren optreden volgens de meest geprononceerde resonantie. Indien echter de nevenresonanties sterk zijn, kan bij geringe demping of bij sterke terugkoppeling, door verandering der anodeafstemming of door verandering van de temperatuur, wel voldaan worden aan de oscillatievoorwaarden voor een nevenresonantie. Dit is in bijzondere mate het geval bij een z.g. *Y*-snede, die daarom practisch niet meer toegepast wordt.

Zooals eerder werd uiteengezet, is het bezwaar van de schakeling volgens Pierce en van schakelingen, die op hetzelfde principe berusten — hiervan noemen we de z.g. Tritet-schakeling, die o.a. toegepast wordt voor frequentieverdubbeling —, dat de frequentie ongeveer gelijk is aan de parallelresonantiefrequentie van het kristal. Deze frequentie wordt bepaald door de parallelcapaciteit, die geen vaste waarde heeft, maar o.a. bepaald wordt door de bedrading. Het streven is naar een oscillatorschakeling, waarbij de zich instellende frequentie ongeveer gelijk zal zijn aan een kristalfrequentie, die niet afhankelijk is van de schakeling. Dit is slechts mogelijk bij schakelingen, waarbij de serieresonantie

van het kristal gebruikt wordt [9, 10]). Het kristal is dan passief en dient meer als filterelement. Hierbij moet de eisch gesteld worden, dat geen nevenfrequenties aanwezig zijn, waardoor deze schakelingen in het algemeen slechts bij lage kristalfrequenties toegepast worden.

B. De toepassing van kwartskristallen in ontvangers

Bij ontvangers is het in bepaalde gevallen mogelijk om door toepassing van kristallen de selectiviteit te vergrooten, terwijl de frequentiestabiliteit te verhoogen is door de heterodyneoscillatoren kristalgestuurd uit te voeren. Men past n.l. bij superheterodyneontvangers voor ongedempte telegrafie in het middenfrequentversterkergedeelte wel een kristalfilter toe. Door de geringe eigendemping van een kristalelement kan een zeer geringe breedte van den doorgelaten frequentieband verkregen worden. Het is duidelijk, dat bij deze geringe bandbreedten de frequentie van den zender en van den heterodyneoscillator in hooge mate constant moet zijn. Daarom is het bij zeer korte golven niet altijd gewenscht om een kristalfilter toe te passen. Door de geringe bandbreedte worden tevens de luchtstoringen en de ruisch aanmerkelijk verminderd, terwijl het mogelijk is om een nabijgelegen storend signaal, b.v. dat de audiospiegelfrequentie levert, effectief te onderdrukken. Ter toelichting van dit laatste diene het volgende.

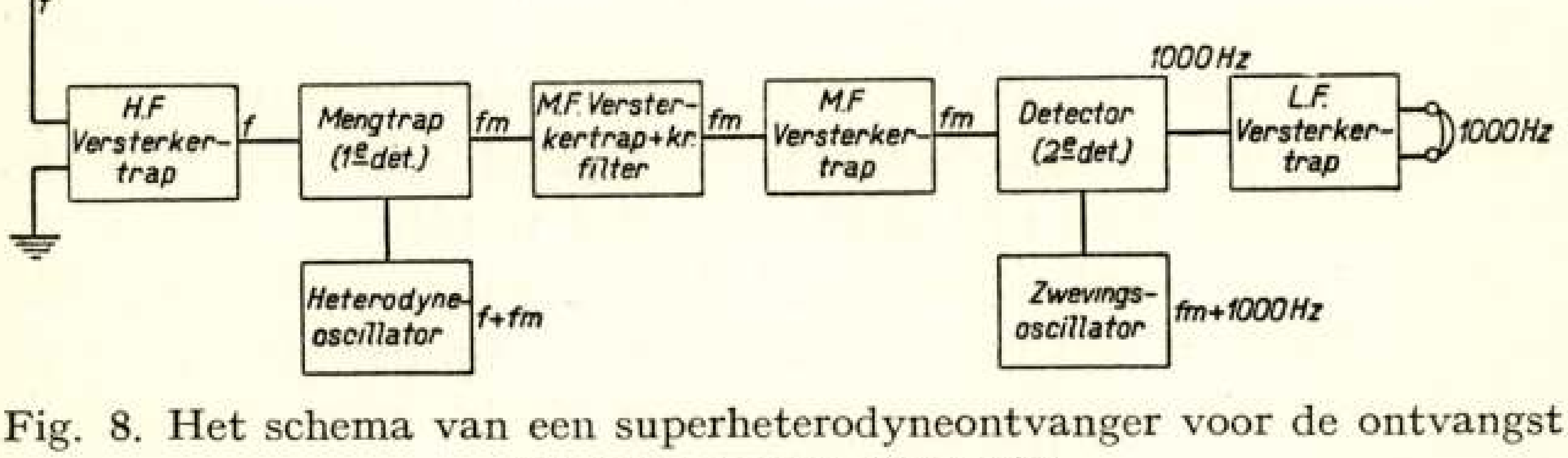


Fig. 8. Het schema van een superheterodyneontvanger voor de ontvangst van ongedempte telegrafie.

Fig. 8 geeft het schema van een superheterodyneontvanger voor ontvangst van ongedempte telegrafie. Het signaal bestaat hierbij uit een hoogfrequente trilling van constante frequentie en met een amplitude, welke in het rhythme van de over te brengen teekens wordt onderbroken.

Zij f de frequentie van het gewenschte signaal, f_m (b.v. 150 kHz) de middenfrequentie van den ontvanger en 1000 Hz de frequentie

van den gewenschten toon, dan is de frequentie van den heterodyne-oscillator $f + f_m$ en van den zwevingsoscillator b.v. $f_m + 1000$ Hz. We noemen $f + 2 f_m$ de spiegelfrequentie en $f - 2000$ Hz de audio-spiegelfrequentie, die beiden als storend signaal kunnen optreden. Immers, de middenfrequentie wordt verkregen als verschil van de oscillatorfrequentie en de signaalfrequentie, maar kan ook verkregen worden als verschil van de spiegelfrequentie en de oscillatorfrequentie. Het is dus noodzakelijk om hét signaal met een frequentie $f + 2 f_m$, dat dus b.v. 300 kHz van het gewenschte signaal verwijderd ligt, in den hoogfrequenttrap zoover te onderdrukken, dat het practisch niet meer als storend signaal in den mengtrap terecht komt.

Welke storing de audiospiegelfrequentie geeft, is als volgt in te zien. Deze levert een middenfrequentie van $f_m + 2000$ Hz, die binnen het doorlaatgebied van het middenfrequentfilter ligt en geeft derhalve na menging met het signaal van den zwevingsoscillator eveneens een toonfrequentie van 1000 Hz. Immers, de toonfrequentie wordt verkregen als verschil van een vaste frequentie, afkomstig van den zwevingsoscillator, en de middenfrequentie, maar kan ook verkregen worden als verschil van een middenfrequentie, afkomstig van de audiospiegelfrequentie, en deze vaste frequentie. De laatstgenoemde middenfrequentie wil men dus, voor het bereiken van den 2den detector, zoo goed mogelijk onderdrukken, waarvoor een kristalfilter kan worden toegepast.

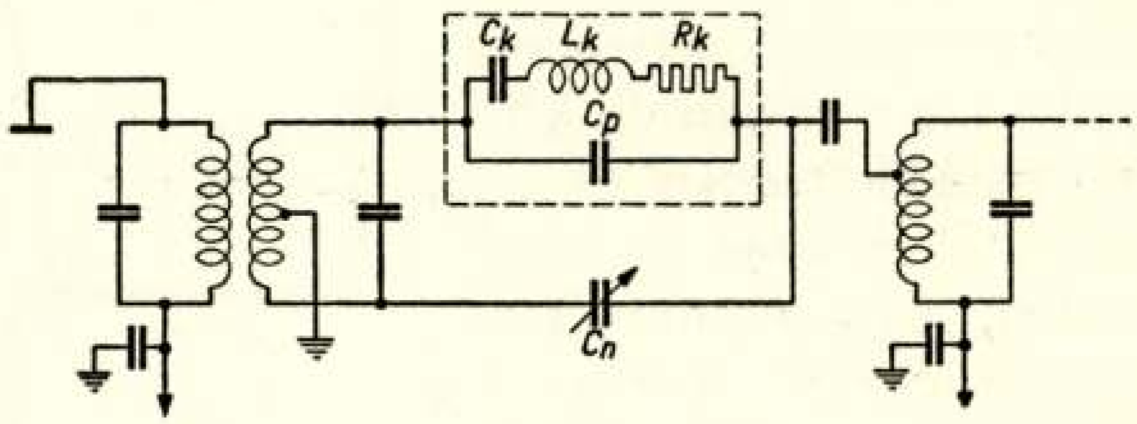


Fig. 9. Een gebruikelijk principeschema van een middenfrequentkristalfilter, waarin voor het kristal het vervangingsschema (I) is ingevoerd.

Fig. 9 geeft een gebruikelijke schakeling voor een middenfrequentkristalfilter, waarin voor het kristal het vervangingsschema (I) is ingevoerd. We merken op, dat het kristal in een brugschakeling is opgenomen. Voor een frequentie, die veel van de eigenfrequentie van het kristal verschilt, bestaat brugevenwicht als $C_n = C_p$. De invloed van C_p wordt door C_n geneutraliseerd. De doorlaatkromme

heeft dan een gedaante volgens fig. 10, terwijl de bandbreedte bepaald wordt door de eigendemping van het kristal en door de demping, die in het circuit geïntroduceerd wordt [9, 11, 12]. Is $C_n < C_p$, dan zal C_p slechts ten deele geneutraliseerd zijn, zoodat dan nog een zekere parallelcapaciteit C_p' aanwezig is. De gedaante van de doorlaatkromme is dan niet symmetrisch (fig. 11), omdat bij parallelresonantie van het kristal het filter maximaal zal sperren. Zooals fig. 11 aangeeft kunnen we hiervan gebruik maken om de audiospiegelfrequentie nog extra te onderdrukken. Bij de behandeling van het vervangingsschema is gebleken, dat de sperweerstand kleiner wordt, naarmate C_p grooter wordt. De frequentie, waarbij maximale onderdrukking optreedt, nadert dan tot de kristalfrequentie (middenfrequentie) en is dus met C_n in te stellen. Is $C_n > C_p$, dan treedt maximale onderdrukking op voor een frequentie, die lager is dan de kristalfrequentie (middenfrequentie).

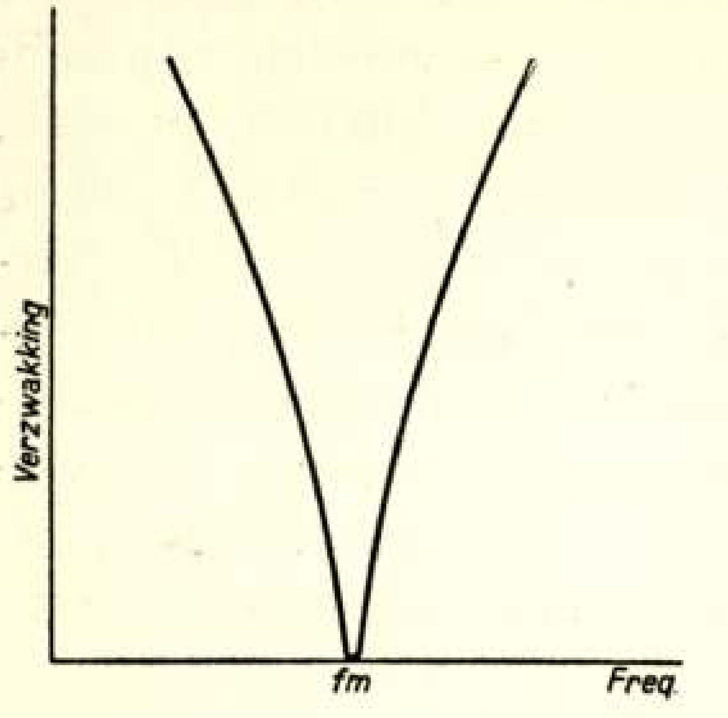


Fig. 10. De doorlaatkromme van een middenfrequentkristalfilter, waarbij de parallelcapaciteit van het kristal geneutraliseerd is ($C_n = C_p$).

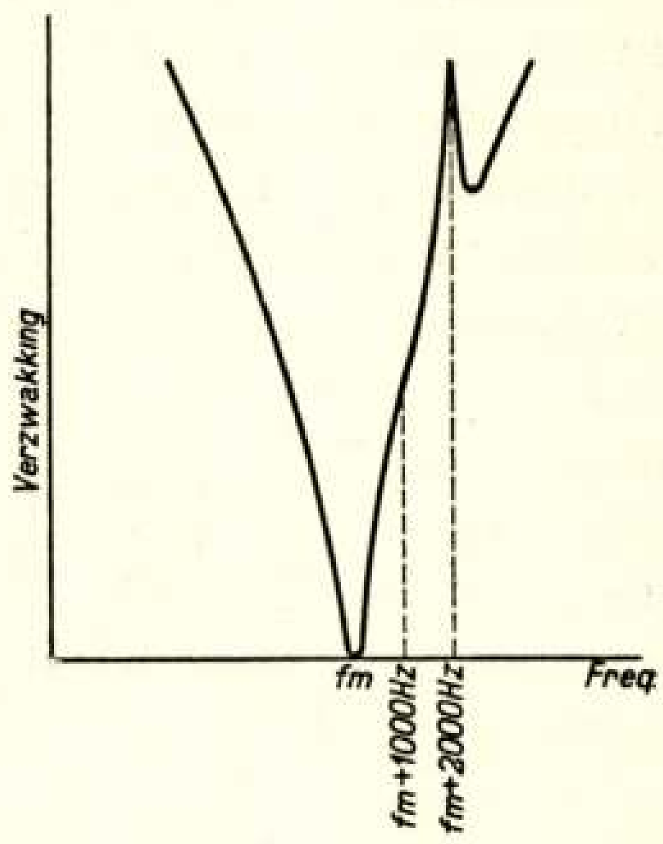


Fig. 11. De doorlaatkromme van een middenfrequentkristalfilter voor het geval, dat $C_n \neq C_p$. Hierbij treedt een punt van maximale onderdrukking op, waardoor een nabijgelegen storend signaal, b.v. de audiospiegelfrequentie, effectief te onderdrukken is.

Bij filterkristallen moet de eisch gesteld worden, dat nevenresonanties niet aanwezig zijn. Hieraan is bij de in het algemeen lage middenfrequenties wel te voldoen.

Verhoogen van de frequentiestabiliteit in ontvangers is in sommige gevallen mogelijk door den heterodyneoscillator met een kristal te sturen. Dit komt alleen voor bij ontvangers, die ingesteld blijven op een bepaalden zender, zooals b.v. bij

ontvangers voor vaste diensten, voor radiocentrales, voor politieoproep, enz.

C. Het meten van frequenties met een nauwkeurigheid van b.v. 10^{-7}

Een toepassing, waarbij de frequentiestabiliteit van een kristaloscillator ten volle tot zijn recht komt, is de z.g. frequentiestandaard, die gebruikt wordt om met zeer groote nauwkeurigheid frequenties te meten. Daar frequentie en tijd in nauw verband met elkaar staan, berust de z.g. kristalklok op hetzelfde principe. De mogelijkheden van frequentiemeting en van tijdmeting zijn dikwijls in dezelfde apparatuur vereenigd.

Het meten van frequenties, die in de radiotechniek voorkomen, geschiedt door de te meten frequentie te vergelijken met een nauwkeurig bekende frequentie. Voegt men twee signalen van weinig verschillende frequentie in een ontvanger samen, dan kunnen de zwevingen hoorbaar gemaakt worden. Op deze wijze is het mogelijk om met groote nauwkeurigheid te constateeren, wanneer de frequenties van twee signalen gelijk zijn. Men moet dus de beschikking hebben over een signaal, waarvan de frequentie continu regelbaar en nauwkeurig bekend is. Hiervoor gebruikt men een hulposcillator, waarvan de schaal met behulp van standaardfrequenties geijkt is en waarvan de frequentie in perioden per seconde afleesbaar is. De ijking moet gedurende de meting constant blijven. Voor een groote nauwkeurigheid is een groot aantal ijkpunten gewenscht, die b.v. 100 Hz van elkaar verwijderd liggen.

De standaardfrequenties worden geleverd door den frequentiestandaard. Deze bestaat uit een samenstel van oscillatoren met grondfrequenties van b.v. 50 kHz (100 kHz), 10 kHz, 1 kHz en 100 Hz. Elke oscillator produceert of zèlf een groot aantal harmonischen (multivibrator) òf wordt gevolgd door een versterkertrap, die een groot aantal harmonischen levert. Fig. 12 geeft het schema van een frequentiestandaard weer. De oscillator met de hoogste grondfrequentie is een kristaloscillator, waarbij alle mogelijke maatregelen genomen zijn om de frequentie op 50 kHz constant te houden. De trillingen van de andere oscillatoren zijn direct of indirect met deze primaire trilling gesynchroniseerd. Op deze wijze kan in een frequentiegebied van 10^2—10^7 Hz een reeks standaard-

frequenties verkregen worden, die in harmonisch verband met elkaar staan.

Om de primaire frequentie nauwkeurig te bepalen sommeert men het aantal perioden over een zekeren tijdsduur, b.v. 24 uren. Dit geschiedt door middel van een synchroonklok, die gevoed wordt met een 1000 Hz-spanning, afkomstig van den 1000 Hz-multivibrator. De klok wijst den juisten tijd aan, wanneer de primaire frequentie nauwkeurig 50 kHz bedraagt. Afwijkingen worden bepaald door middel van precisietijdseinen [13]) en als correctie van de frequentie ingevoerd.

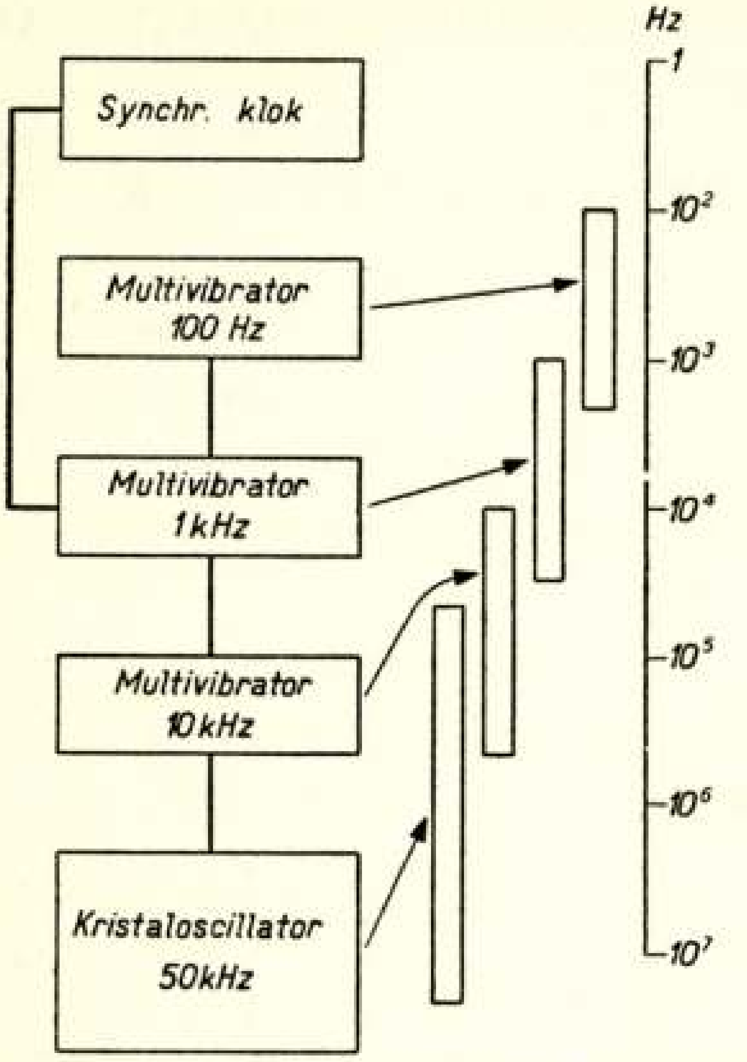


Fig. 12. Het schema van een frequentiestandaard.

De multivibrator bestaat uit een z.g. relaxatieoscillator, waarvan in fig. 13 het principeschema is weergegeven. De uitgangsspanning is sterk vervormd en dus rijk aan harmonischen. Fig. 14 geeft de gedaante van de roosterspanning en van den anodestroom. Het is nu mogelijk de trilling te synchroniseeren door een spanning toe te voeren, waarvan de frequentie gelijk is aan een harmonische van de multivibratorfrequentie. Op deze wijze wordt dus frequentiedeeling verkregen [14]).

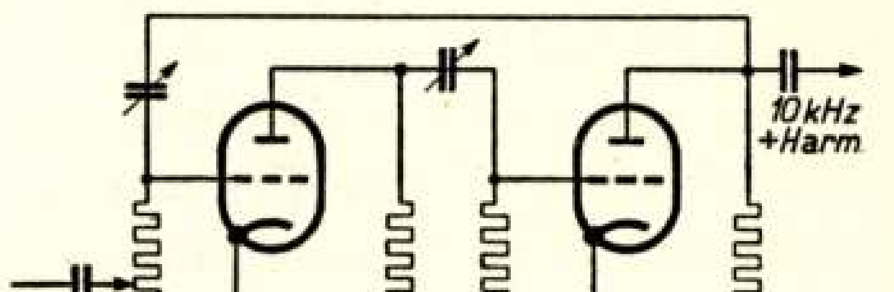


Fig. 13. Het principeschema van een multivibrator. De grondtrilling van b.v. 10 kHz is te synchroniseeren door een spanning met een frequentie van b.v. 50 kHz.

Door R o h d e en L e o n h a r d t [15]) is een andere methode voor frequentiedeeling ontwikkeld, waarvan in fig. 15 het principeschema is weer gegeven. De primaire frequentie wordt weer verkregen van een kwartsoscillator, hier voor 100 kHz. De stemvorkoscillator, die zelf al een behoorlijke frequentiestabiliteit bezit, heeft een grondfrequentie van 1 kHz, die

regelbaar is met behulp van den gelijkstroom I. Door middel van een kristalfilter voor 100 kHz wordt alleen de 100ste harmonische

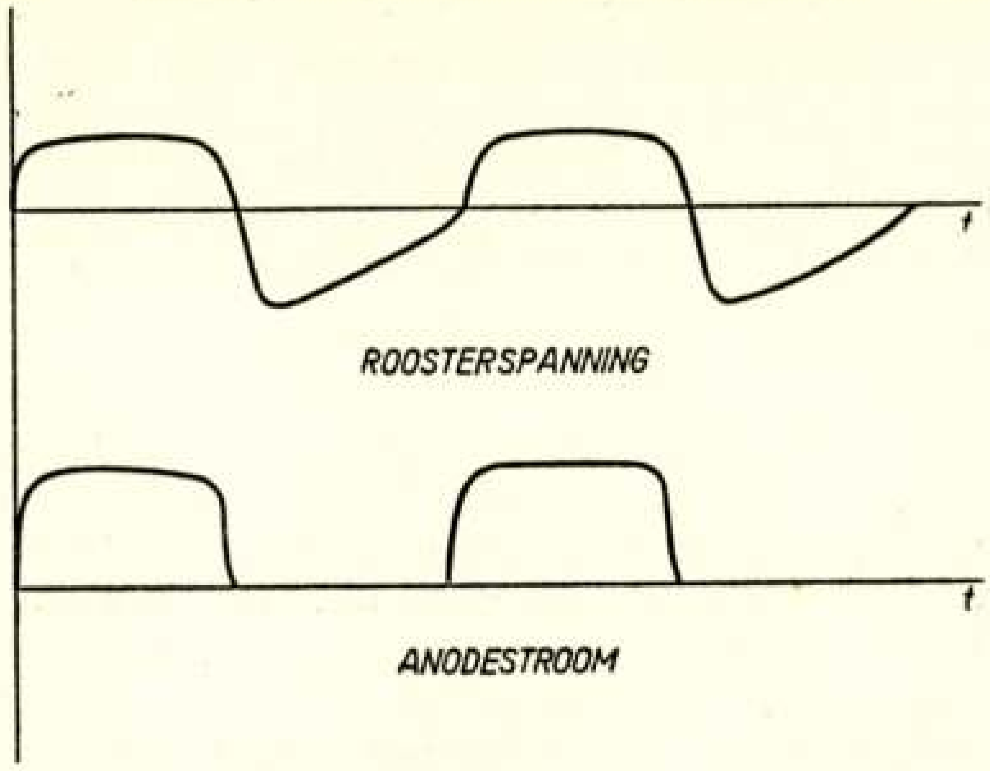


Fig. 14. De sterk vervormde roosterspanning en anodestroom van den multivibrator.

doorgelaten en versterkt. De beide spanningen van 100 kHz worden gesommeerd en gelijkgericht. De gelijkgerichte stroom is afhankelijk van het phaseverschil tusschen de beide spanningen

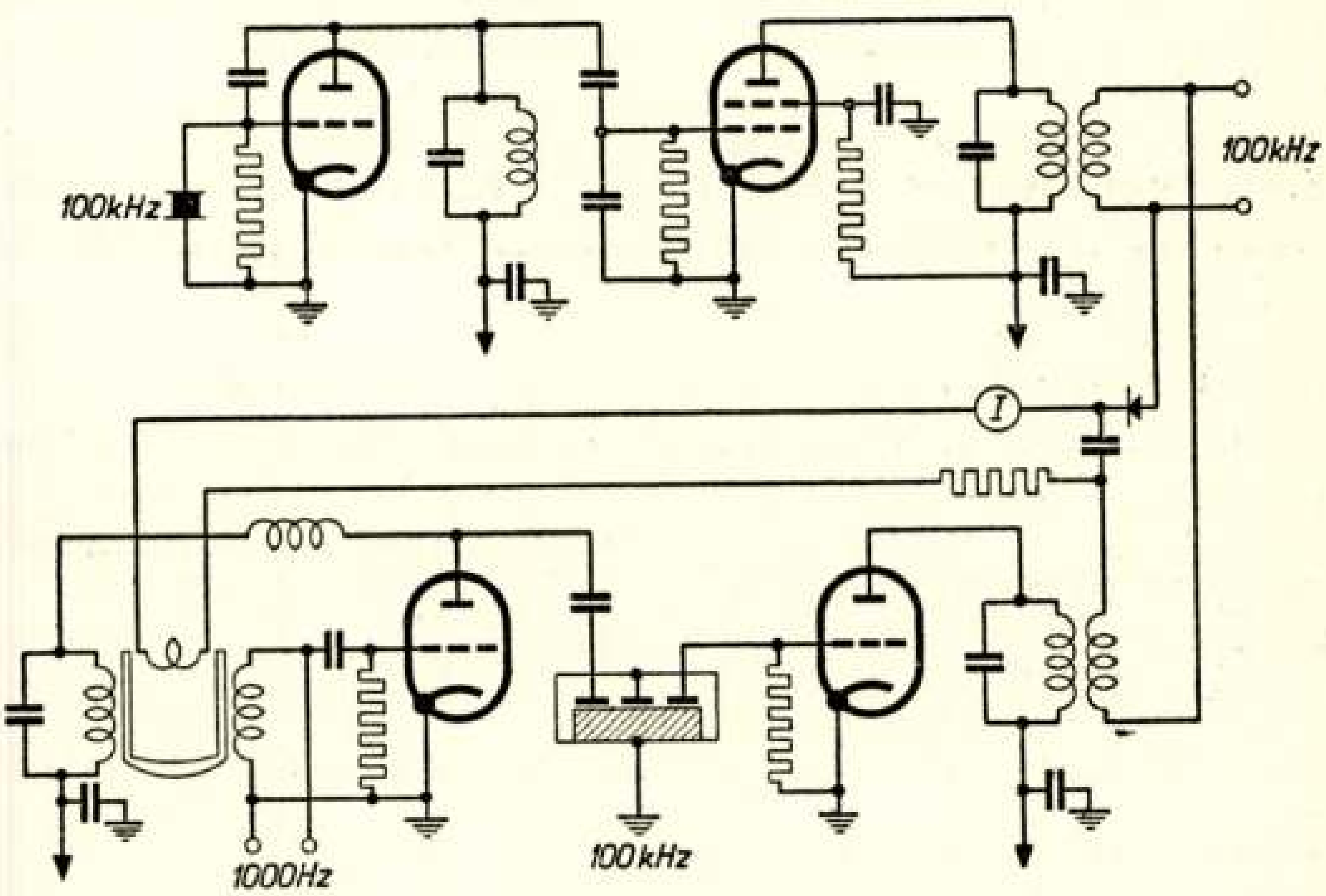


Fig. 15. Het principeschema voor een methode van frequentiedeeling volgens Rohde en Leonhardt.

en synchroniseert op deze wijze de trilling van den stemvork-oscillator.

De nauwkeurigheid, die men kan bereiken, is buitengewoon

groot en bedraagt 10^{-8}—10^{-9}, wat overeenkomt met een afwijking over 24 uren van 1/1000 seconde. Deze nauwkeurigheid is grooter dan bij de astronomische tijdsbepaling volgens sterdoorgangen, waarbij de nauwkeurigheid 1/100 seconde per dag bedraagt.

Nederlandsche Seintoestellen Fabriek,
Hilversum.

LITERATUUR:

1) W. G. Cady, The piëzo-electric resonator, Proc. I. R. E. **10**, 83, (1922).
2) C. F. Baldwin, Quartz crystals, Gen. El. Rev. **43**, Nos. 5 & 6, (1940).
3) B. van der Pol, Het gebruik van piëzo-electrische kwartskristallen in de draadlooze telegrafie en telefonie, Gedenkb. Ned. Ver. voor Radiotelegrafie, (1926).
4) R. Bechmann, Quarzresonatoren, Telefunken-Ztg. **18**, Nr. 76, (1937).
5) G. W. Pierce, Piëzo-electric crystal resonators and crystal oscillators applied to the precision calibration of wave meters, Proc. Am. Ac. of Arts and Sciences, **59**, 81, (1923).
6) J. E. P. Vigoureux, The valve-maintained quartz oscillator, J. Inst. El. Eng. **68**, 265, (1930).
7) I. Koga, Characteristics of piëzo-electric quartz oscillators, Proc. I. R. E. **18**, 1935, (1930).
8) K. Heegner, Über den Kristalloszillator nach Pierce, El. Nachr. Techn. **10**, 357, (1933).
9) R. Bechmann, Über Schaltungen für piëzoelektrische Quartzoszillatoren und -resonatoren zur Frequenzstabilisierung und als Selektionsmittel, Telefunken-Ztg. **19**, Nr. 78, (1938).
10) K. Heegner, Gekoppelte selbsterregte elektrische Kreise und Kristalloszillatoren, El. Nachr. Techn. **15**, 359, (1938).
11) W. Kautter, Quarzfilter mit stetiger Bandbreitenregelung, Telefunken-Ztg. **18**, Nr. 76, (1937).
12) W. Kautter, Breite Quarzregelfilter, Telefunken-Ztg. **18**, Nr. 77, (1937).
13) Zeitsignale, E. S. Mittler & Sohn, Berlin, (1941).
14) B. v. d. Pol and J. v. d. Mark, Frequency demultiplication, Nature **120**, 363, (1927).
15) L. Rohde u. R. Leonhardt, Quartzuhr und Normalfrequenzgenerator, El. Nachr. Techn. **17**, 117, (1940).

Toepassing van piëzo-electrische kristallen bij geluidsweergave

door J. de Boer

Inleiding

Bij de weergave van muziek of van het gesproken woord brengen de luchttrillingen het membraan of de trilplaat van een microfoon in beweging. Deze mechanische beweging wordt hier omgezet in een electrische wisselspanning (meestal van de orde van grootte van een millivolt). In een electrische versterker worden deze wisselspanningen zooveel als noodig is versterkt. De door de versterker afgegeven wisselenergie (van de orde van enkele watts) brengt de conus van een luidspreker in beweging, die op haar beurt de lucht weder in trilling brengt. Bij registratie van geluid brengt de wisselenergie de snijstift van een gramofoonplaten- of filmschrijver of, indien langs optischen weg geregistreerd wordt, het spiegeltje van een oscillograaf in beweging. Bij de weergave van op gramofoonplaten geregistreerd geluid wordt de beweging van de aftastnaald in de pick-up in een electrische wisselspanning omgezet.

Bij de geluidsweergave moeten de intensiteiten van frequenties van 50—10 000 Hz evenveel worden versterkt. Dit geldt niet alleen voor de geheele weergave, maar ook zooveel mogelijk voor ieder onderdeel der weergave-apparatuur.

Bij de electro-mechanische omzetting worden in hoofdzaak het electromagnetische, het electrodynamische en het piëzo-electrische principe toegepast. Deze principes zijn omkeerbaar. Het is mogelijk om op grond van één van hen mechanische trillingen in electrische wisselspanningen om te zetten en omgekeerd *).

Van de verschillende piëzo-electrische materialen komt voor deze toepassingen tot nu toe alleen seignettezout in aanmerking. Het

*) De mechano-electrische omzetting verkregen door de weerstandsverandering van koolkorrels is b.v. eenzijdig. Het is niet mogelijk om langs dezen weg electrische wisselspanningen om te zetten in mechanische trillingen.

piëzo-electrische effect van alle andere tot nu toe bekende materialen is bij kamertemperatuur te klein, zoodat b.v. bij gebruik als microfoon electrische stoorsignalen te sterk op den voorgrond zouden treden t.o.v. het gegeven signaal.

§ 1. *Enkele eigenschappen van seignettezout*

Seignettezout (of Rochellezout, of kaliumnatriumtartraat, $NaKC_4H_4O_6 . 4\ H_2O$) heeft een rhombische kristalstructuur (fig. 1) met een verhouding der drie onderling loodrechte assen van $a : b : c = 0{,}8317 : 1 : 0{,}4296$. Op grond van de kristallografische eigenschappen verschillen alleen de piëzo-electrische moduli q_{231}, q_{312} en q_{123} van nul [1]). Dit wil zeggen, dat het piëzo-electrisch effect bij deze stof een longitudinaal afschuivingseffect is: een schuifspanning τ volgens twee der assen heeft een polarisatie P in de richting van de derde as tot gevolg en omgekeerd veroorzaakt een electrisch veld F in de richting van een kristallografische as een afschuiving γ langs de beide andere assen. De bij deze beide effecten optredende piëzo-electrische moduli zijn twee aan twee gelijk [2]):

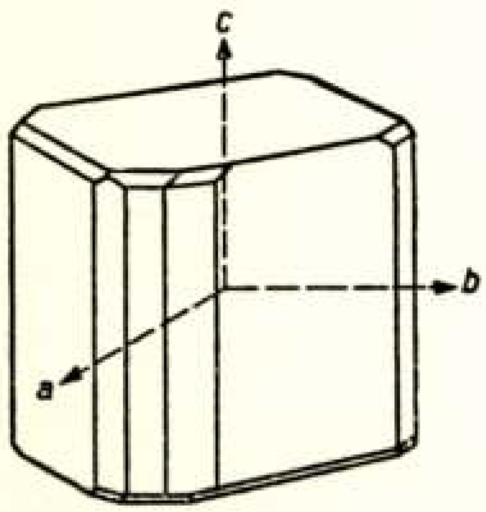


Fig. 1. Model van een seignettezoutkristal.

$$P_1 = q_{231}\tau_{23}, \quad P_2 = q_{312}\tau_{31}, \quad P_3 = q_{123}\tau_{12}, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

$$\gamma_{23} = q_{231}F_1, \quad \gamma_{31} = q_{312}F_2, \quad \gamma_{12} = q_{123}F_3. \quad \ldots \ldots \quad (2)\ ^*)$$

Van de drie coëfficienten q is q_{231} de grootste (polarisatie in de richting van de a-as). Terwijl b.v. bij kwarts de verschillende coëfficienten q alle kleiner zijn dan 10.10^{-8} e.s.e./dyne, kan bij seignettezout de coëfficient q_{231} een waarde van de orde van $10\,000.10^{-8}$ e.s.e./dyne bereiken.

Bij de toepassingen wordt alleen van de polarisatie in de richting van de a-as gebruik gemaakt. De indices van de modulus q_{231} zullen daarom in dit artikel verder achterwege worden gelaten.

Voor electrische versterking is van belang het electrische potentitaalverschil (open spanning), dat optreedt bij een mechanische

---

*) In de literatuur worden de piëzo-electrische moduli q_{231}, q_{312}, q_{123} vaak aangeduid als resp. δ_{14}, δ_{25} en δ_{36}.

deformatie. Tengevolge van de electrische ladingen op de oppervlakken ontstaat dan in het kristal een electrische veldsterkte, die de polarisatie beïnvloedt, nl.

$$P = \varkappa F + q\tau. \qquad \qquad (3)$$

$\varkappa$ is hier de electrische susceptibiliteit. De electrische veldsterkte F wordt nu verder gegeven door de betrekking:

$$F = -4\pi P \qquad \qquad (4)$$

Uit de vergelijkingen (3) en (4) volgt nu

$$F = -4\pi \frac{q}{1 + 4\pi\varkappa} \tau = -4\pi \frac{q}{\varepsilon} \tau \qquad \qquad (5)$$

Hierbij stelt ε de diëlectriciteitsconstante voor. Uit (5) volgt, dat het potentiaalverschil evenredig is met q/ε. Behalve de piëzo-electrische modulus is dus ook de diëlectriciteitsconstante van belang.

Behalve een zeer groote piëzo-electrische modulus heeft seignettezout in de richting van de *a*-as ook een groote diëlectriciteitsconstante. Deze beide grootheden zijn sterk afhankelijk van de temperatuur [3, 4]), hetgeen voor de toepassingen natuurlijk zeer bezwaarlijk is. Zooals uit de figuren 2 en 3 blijkt, nemen de genoemde grootheden in het temperatuurgebied tusschen —18°C en +23,7°C zeer hooge waarden aan. In analogie met magnetische verschijnselen spreekt men in dit temperatuurgebied over ferro-electriciteit of ook wel van seignettepiëzo-electriciteit. De beide bovengenoemde kritische temperaturen worden dan ook de laagste en hoogste Curietemperatuur genoemd. Zij worden resp. aangeduid met Θ_1 en Θ. In dit opzicht is er reeds direct een verschil met het ferromagnetisme. Ferromagnetische stoffen hebben slechts één Curiepunt. Boven deze temperatuur is de stof paramagnetisch, beneden de Curietemperatuur is zij ferromagnetisch. In het temperatuurgebied tusschen de Curietemperaturen van seignettezout treedt, evenals bij ferromagnetisme, hysterese op. In de richting van de beide andere (*b*- en *c*-) assen gedraagt seignettezout zich normaal.

Deze verschijnselen zijn voor verschillende toepassingen van seignettezout zeer hinderlijk. De gevoeligheid van de apparaten

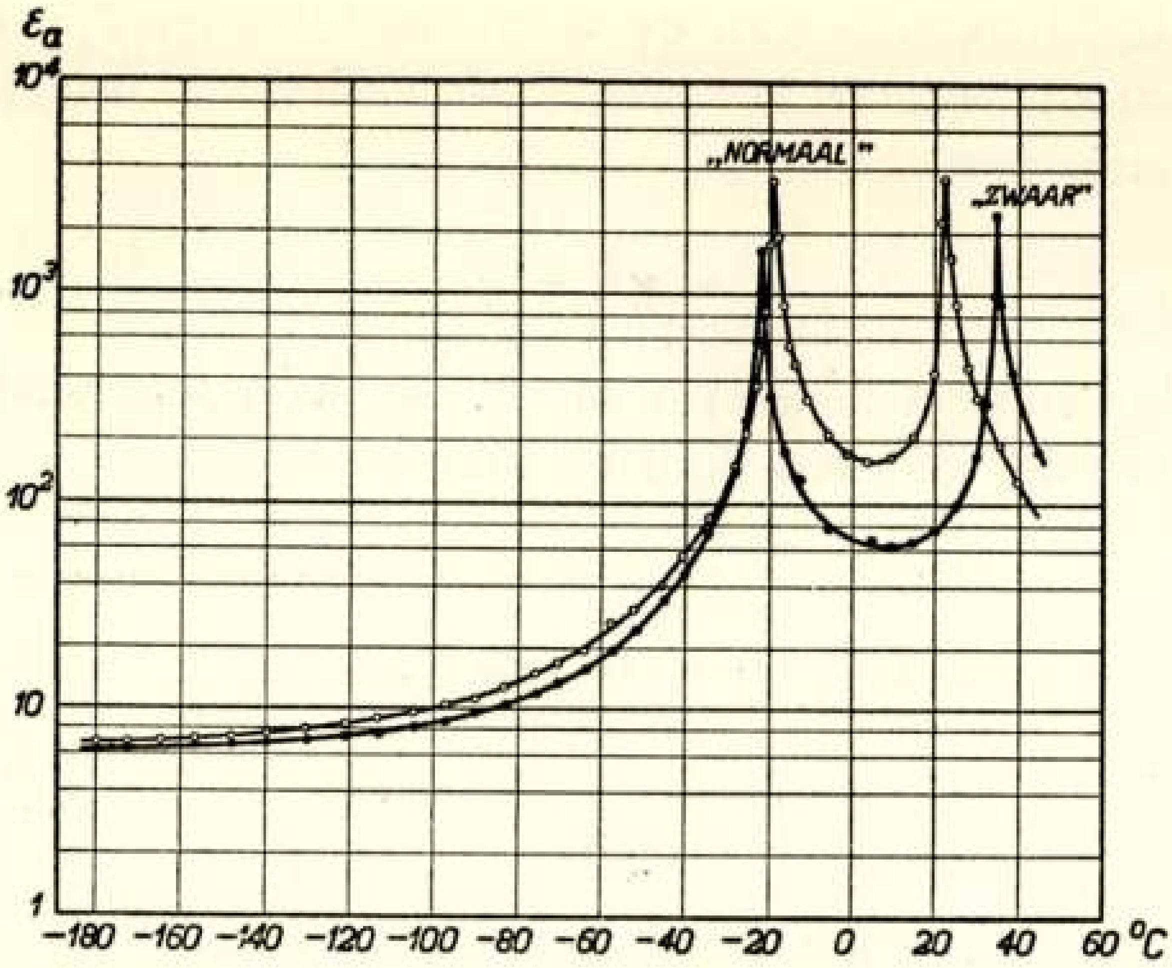


Fig. 2. Diëlectriciteitsconstante in de richting van de a-as van seignettezout als functie van de temperatuur: a. voor normaal seignettezout, b. voor „zwaar" seignettezout (volgens H a b l ü t z e l).

is sterk afhankelijk van de temperatuur, terwijl de hysterese oorzaak is, dat bij een met de tijd sinusvormig veranderlijke spanning geen sinusvormig veranderlijke lading optreedt, maar één die harmonischen bevat. Er treedt dus vervorming op. Zooals uit het

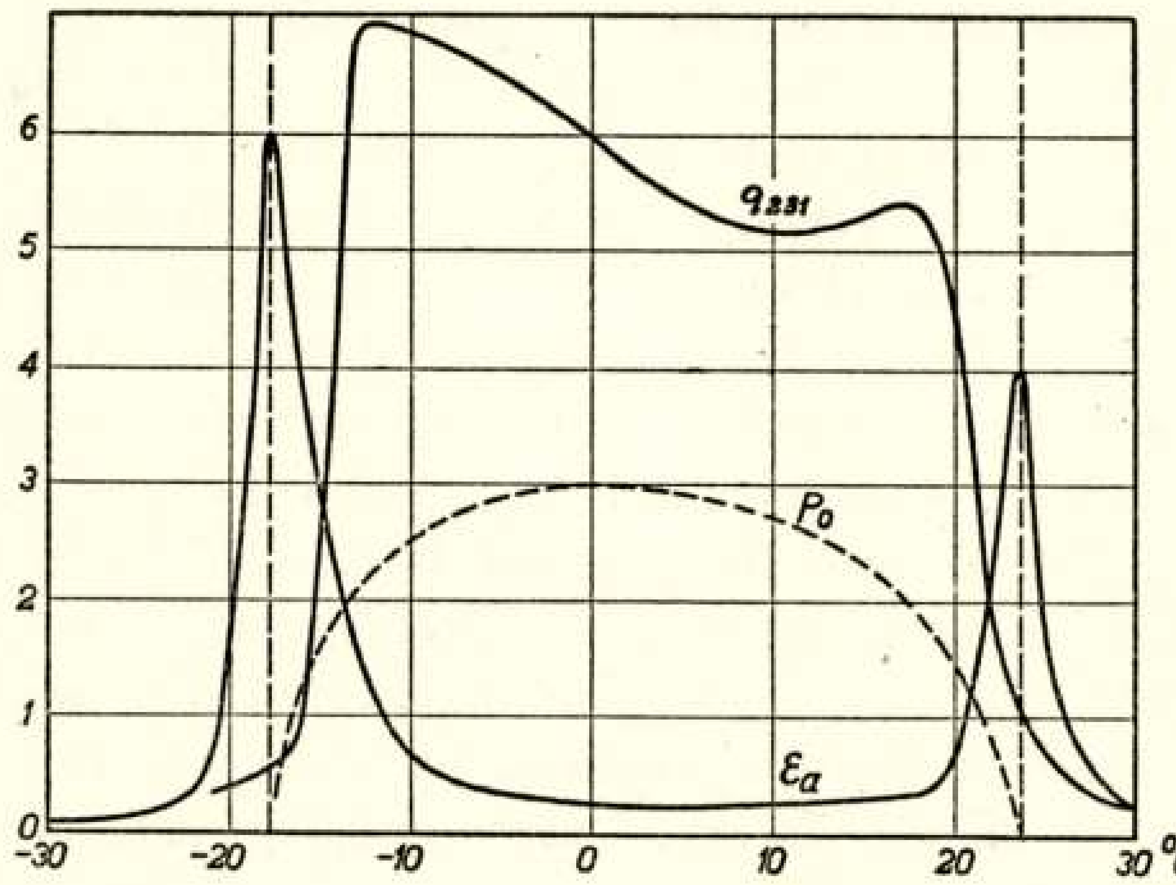


Fig. 3. Diëlectriciteitsconstante (ϵ), piëzo-electrische modulus (q_{231}) en spontane polarisatie (P_0) in de richting van de a-as van seignettezout (volgens C a d y).

volgende blijkt, kunnen deze schadelijke verschijnselen in voldoende mate onderdrukt worden. Dit geschiedt door mechanische spanningen [5]).

Wordt b.v. de diëlectriciteitsconstante gemeten, terwijl het kristal geheel ingeklemd is, zoodat het niet kan bewegen, dan verdwijnen de Curietemperaturen en het kristal blijft para-electrisch. Er treedt dan ook geen hysterese meer op. De invloed van mechanische spanningen op de te meten diëlectriciteitsconstante (of electrische susceptibiliteit) volgt ook uit de vergelijkingen (3) en (6). Wordt een electrische spanning F en een mechanische schuifspanning τ aan een kristal aangelegd, dan geldt:

$$P = \varkappa F + q\tau \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\gamma = qF + \tau/G \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

G is de glijdingsmodulus, γ de hoek van afschuiving, terwijl de andere letters de vroeger reeds gebruikte beteekenis hebben.

Is $\tau = 0$, dan is de susceptibiliteit $\varkappa$. Voor het ingeklemde geval geldt $\gamma = 0$. De susceptibiliteit bedraagt dan:

$$\varkappa' = \varkappa - q^2G \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)\ ^{*})$$

Voor de meeste piëzo-electrische kristallen is de correctie q^2G klein, bij kwarts b.v. slechts 2 %, bij Rochellezout vanwege de hooge waarde van q echter niet. Hierin vinden we tevens de verklaring, waarom oudere experimenteele gegevens over de diëlectriciteitsconstante van seignettezout onderling zoo veel verschillen. De spanningstoestand, waarin het kristal verkeerde (die b.v. reeds door dikke electroden aan de kristaloppervlakken kan ontstaan), werd geheel buiten beschouwing gelaten. Voor de toepassingen is het dus gewenscht het kristal min of meer in te klemmen.

Bij het bovenste Curiepunt van een niet ingeklemd kristal treden nog andere verschijnselen op, zooals verandering van elastische eigenschappen [6]), een anomalie in de soortelijke warmte [7]), Kerr-effect [8]).

---

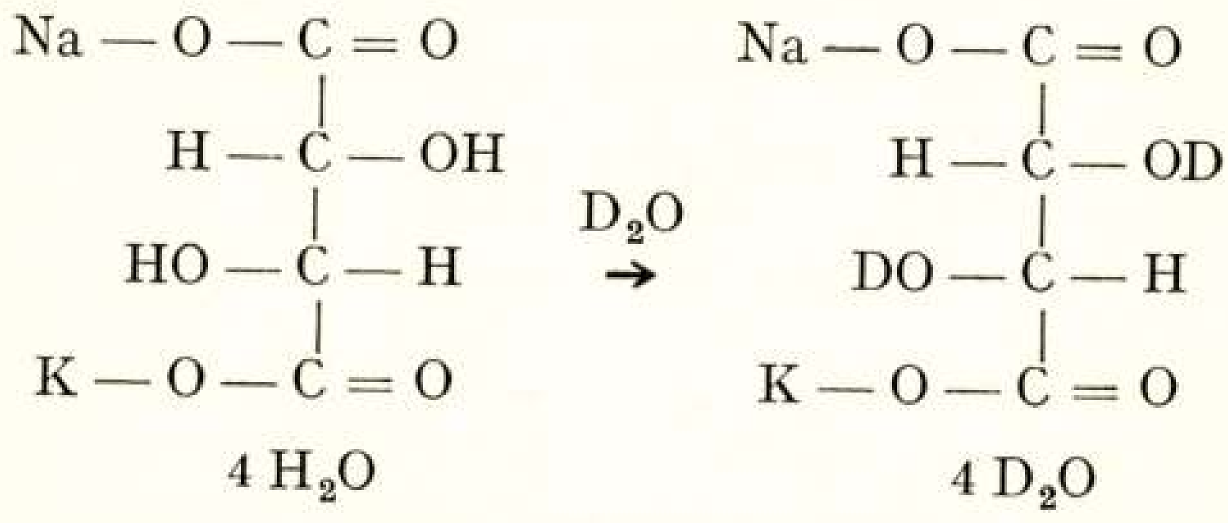
*) Bij gebruik van Giorgi-eenheden [2]) kunnen wij de vergelijkingen (3), (4), (5) en (7) vervangen door resp. $D = KF + q\tau$, $D = 0$, $F = -q\tau/K$ en $K' = K - q^2G$.

Opgemerkt zij, dat de hierin voorkomende K de absolute diëlectrische constante is, in tegenstelling tot de boven gebruikte ϵ, welke de verhouding van de diëlectrische constante van het beschouwde materiaal tot die van het vacuum voorstelt.

§ 2. *Andere ferro-electrische kristallen*

Behalve kaliumnatriumtartraat (Rochellezout, $NaKC_4H_4O_6.4H_2O$) zijn de isomeren, waarbij het kaliumatoom door rubidium, thallium of het ammoniumradicaal NH_4 vervangen is, seignette-piëzo-electrisch. Ook het $NaKC_4H_2D_2O_6 . 4\,D_2O$ [3]) heeft analoge eigenschappen.

Opmerkelijk is de vrij aanzienlijke verschuiving van de Curiepunten (fig. 2). Het „zware" seignettezout ontstaat uit normaal seignettezout volgens de omzetting:



Enkele jaren geleden heeft B u s c h [9]) een viertal geheel nieuwe ferro-electrische kristallen gevonden, nl. de anorganische verbindingen KH_2PO_4, KH_2AsO_4, $NH_4\,H_2PO_4$ en $NH_4\,H_2AsO_4$.

De bovenste Curietemperatuur van pr.kaliumphosphaat was $\Theta = 114°K$, die van pr.kaliumarsenaat $\Theta = 92°K$. Het bestaan van het laagste Curiepunt Θ_1 is bij deze stoffen nog niet aangetoond. Metingen bij lage temperatuur zullen hierover nog uitsluitsel moeten geven. Het piëzo-electrisch verschijnsel van deze tetragonale kristallen is evenals bij Rochellezout een longitudinaal afschuivingseffect.

§ 3. *Oorzaak van de ferro-electrische eigenschappen*

Van de verschillende modellen, die ontworpen zijn teneinde een kwalitatief beeld te krijgen van de ferro-electrische eigenschappen, dringt het voorstel van F o w l e r [10]), ofschoon het vele bezwaren heeft, het diepst tot de kern door. F o w l e r beperkt zich tot een verklaring van het bestaan van 2 Curiepunten, in tegenstelling met het ferromagnetisme, waarbij slechts één Curiepunt optreedt. Hij gaat uit van de veronderstelling, dat door een electrisch veld in het kristal dipolen of dipoolgroepen gericht worden. Het bestaan van het bovenste Curiepunt wordt op dezelfde wijze

verklaard als in het ferromagnetisme bij het model van Langevin-Weiss, waarbij de warmtebeweging de instelling van de draaibare electrische dipolen in een electrisch veld tegenwerkt. Des te hooger de temperatuur is, des te sterker de invloed van de warmtebeweging wordt en des te kleiner de resulteerende polarisatie zijn zal. Het veld F', dat op een enkele dipool werkt, bestaat behalve uit het uitwendige veld F uit een veld NP, dat door de polarisatie P van de overige dipolen veroorzaakt wordt, dus $F' = F + NP$. Met dit model is de groote susceptibiliteit (diëlectriciteitsconstante) en het bestaan van een remanente polarisatie zonder uitwendig veld (hysterese) beneden een bepaalde temperatuur te verklaren.

Voor de verklaring van het laagste Curiepunt neemt Fowler aan, dat alleen die dipolen vrij kunnen roteeren en zich dus in een uitwendig veld kunnen instellen, wier kinetische energie tengevolge van de warmtebeweging grooter is dan een zekere fractie β van een potentieele energie W, veroorzaakt door het veld van naburige dipolen ($W_{kin} > \beta W$).

Omtrent de energie W wordt verder nog verondersteld, dat deze evenredig is met de fractie S van het aantal dipolen, dat dan niet roteert ($W = SW_0$, waarbij W_0 constant is). Door de temperatuur te verlagen vermindert de kinetische energie der dipolen en wordt bovendien de drempelenergie W hooger, zoodat steeds meer dipolen „bevriezen" en zich niet meer kunnen instellen in een electrisch veld. Het blijkt, dat de polarisatie bij een bepaald veld beneden een bepaalde temperatuur (laagste Curietemperatuur Θ_1) snel afneemt. Tusschen de Curietemperaturen is de susceptibiliteit (diëlectriciteitsconstante) oneindig groot. Het temperatuurgebied tusschen de beide Curietemperaturen kan door de keuze van de grootheden β en W_0 nog vastgelegd worden. Het is b.v. mogelijk om $\Theta = \Theta_1$ te maken en ook om $\Theta_1 > \Theta$ te kiezen.

Een van de groote leemten van de voorstelling van Fowler is, dat de zeer groote invloed van mechanische spanningen geheel buiten beschouwing wordt gelaten. Ook rijst de vraag, welke dipolen verantwoordelijk zijn voor de ferro-electriciteit. Bij seignettezout wordt wel aangenomen, dat dit de kristalwatermoleculen zijn, daar deze een zeer groot dipoolmoment hebben. De onderzoekingen van Hablützel [3]) over seignettezout met zwaar water zouden hierover uitsluitsel kunnen geven, indien alleen het kristalwater door zwaar water vervangen werd en *niet* tevens zware waterstofatomen

in de wijnsteenzuurgroep opgenomen werden. De auteur heeft aangekondigd proeven in deze richting te zullen nemen. Een andere indirecte aanwijzing voor den invloed van kristalwater is, dat, als dit aan het kristal onttrokken wordt (door drogen met P_2O_5 kan het gewicht van seignettezout met 5 % afnemen), de diëlectriciteitsconstante afneemt. In de andere ferro-ëlectrica KH_2PO_4 en KH_2AsO_4 zijn echter geen H_2O moleculen met hun sterk dipoolmoment aanwezig. Misschien zijn hier O/H\O groepen verantwoordelijk voor de verschillende effecten.

De aanwezigheid van een remanente polarisatie tusschen de Curietemperaturen is door S t a u b [11]) met Röntgenstralen aangetoond. Door hem werd de intensiteit van een door een bepaald kristalvlak gereflecteerde bundel Röntgenstralen met een ionisatie-

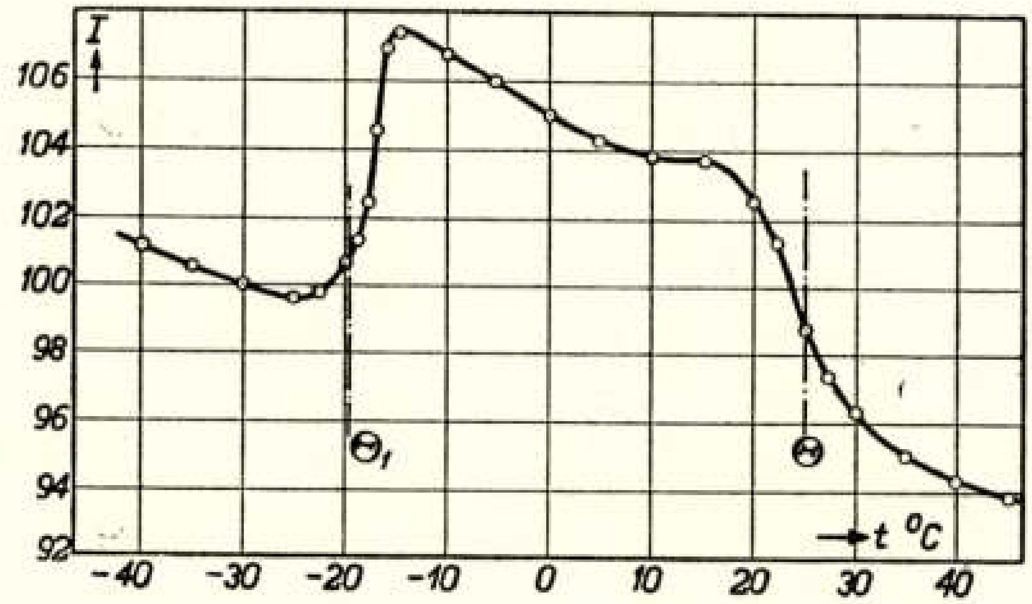


Fig. 4. Intensiteit van de door seignettezout gereflecteerde Röntgenstralen als functie van de temperatuur (volgens S t a u b).

kamer gemeten. Behalve de normale afname van de intensiteit met de temperatuur werd tusschen de Curiepunten een grootere intensiteit waargenomen (fig. 4).

§ 4. *Uitvoeringsvormen*

Zooals uit het voorgaande gebleken is, moet bij de toepassing van Rochellezout in electro-acoustische apparaten uitgegaan worden van de groote piëzo-electrische en diëlectrische constante in de richting van de *a*-as. De afhankelijkheid van de temperatuur van deze eigenschappen kan voldoende verminderd worden door het aanbrengen van mechanische spanningen. De seignettezoutkristallen, die tegenwoordig in microfoons, pick-ups, enz. gebruikt worden, zijn voor het allergrootste deel afkomstig van de Brush-Crystal

Company (Cleveland, Ohio). De door dit laboratorium ontwikkelde constructie zal in het kort worden weergegeven [12]).

Uit het kristal worden plaatjes gezaagd loodrecht op de *a*-as. Wordt verder uit een dergelijk plaatje een rechthoek gesneden, zoodat de richting van de lengte en breedte evenwijdig aan de *b*- en *c*-as loopen, en wordt tusschen electroden, die op vóór- en achtervlak (⊥ *a*-as) bevestigd zijn, een electrisch spanningsverschil aangelegd, dan treedt langs de lengte en de breedte een afschuiving

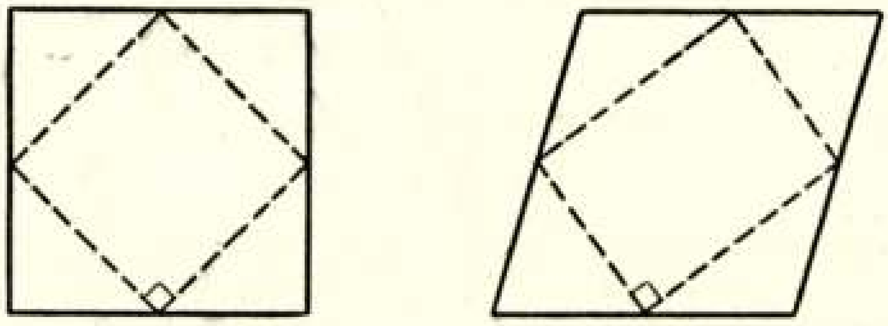


Fig. 5. Deformatie van een vierkant door afschuiving.

op (fig. 5). Richtingen, die een hoek van 45° maken met deze *b*- en *c*-as worden bij deze afschuiving verkort of verlengd.

Microfoon

Bij deze apparaten maken de richtingen van de lengte en breedte van het kristalplaatje meestal een hoek van 45° met de *b*- en *c*-as. Door een electrisch veld worden nu de lengte- en breedterichting verkort of verlengd en omgekeerd zal, zooals bij een microfoon juist gebeurd, b.v. een contractie in de lengterichting een polarisatie tot gevolg hebben. Een tweetal van dergelijke plaatjes wordt nu, met de richting van de (positieve) *a*-as tegengesteld, op elkaar geplakt tot een zg. bimorf buigingselement (fig. 6*a*). Een dergelijk bimorf element wordt nu op een tweetal punten gelegd, zoodat het, b.v. door de geluidsgolven, kan doorbuigen. Hierdoor wordt b.v. de bovenste laag boven de elastische neutrale lijn verkort, terwijl de lagen beneden deze lijn uitgerekt worden. Doordat de positieve richting van de *a*-as in beide helften tegengesteld is, ontstaat tusschen de electroden aan boven- en onderzijde van het plaatje nu toch een spanningsverschil (fig. 6*b*). Door de bimorfe constructie worden lijnen op verschillenden afstand van de neutrale laag niet in dezelfde mate uitgerekt of samengedrukt. Hierdoor ontstaan mechanische spanningsverschillen, die voldoende zijn om den invloed van de temperatuur te verminderen.

De verandering van de diëlectriciteitsconstante met de temperatuur bedraagt bij deze constructie ongeveer een factor twee. De opgewekte electrische spanning is echter veel minder afhankelijk van de temperatuur. Deze verandering kan minder dan 20 % bedragen. Tusschen —20°C en +55°C kan seignettezout in deze constructie toegepast worden. Bij deze laatste temperatuur ontleedt het.

Twee van de bovengenoemde bimorfe elementen worden meestal met gemeenschappelijke draaipunten samengevoegd tot een geluidscel (fig. 6*c* en 6*d*).

Het electrische potentiaalverschil tusschen de electroden is even-

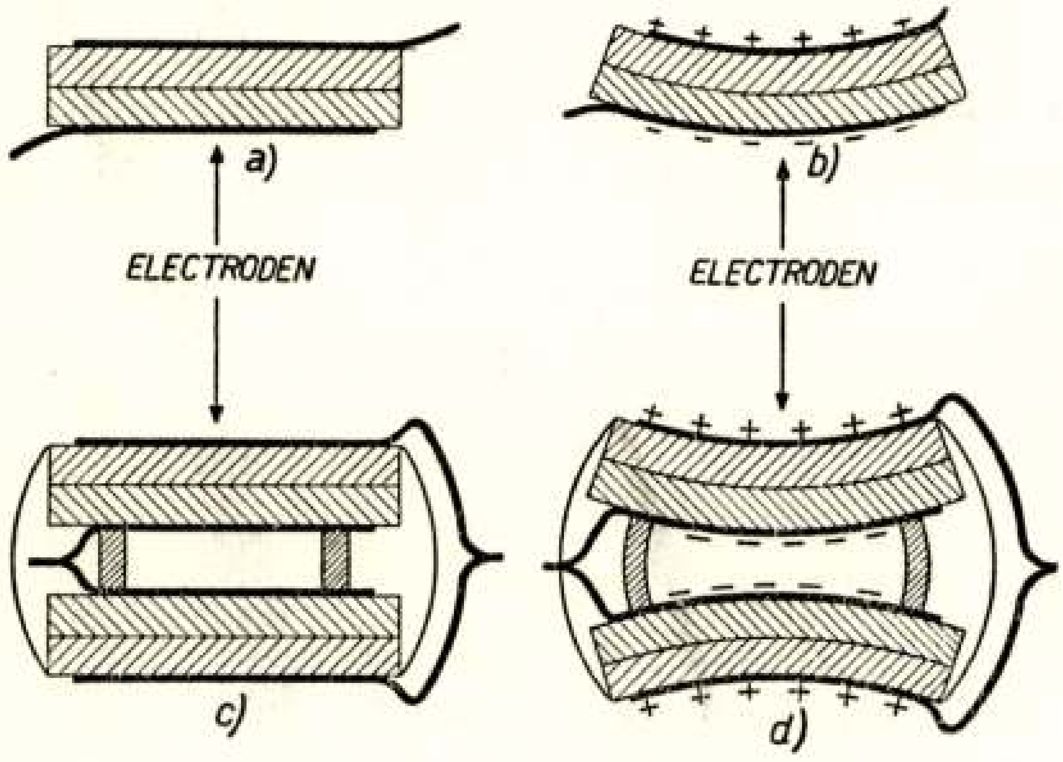


Fig. 6. Opbouw van een kristalmicrofoon.

redig met de uitrekking en deze is op haar beurt weer evenredig met de doorbuiging x van het kristal door den wisseldruk $p_0 e^{j\omega t}$ van het geluid. De doorbuiging x kan uit de volgende vergelijking berekend worden:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + sx = p_0 e^{j\omega t} \quad \text{.............. (8)}$$

Hierbij stellen m, r en s resp. de effectieve massa, weerstand en stijfheid van het kristal voor. Bij frequenties lager dan de resonantiefrequentie $\left(\omega_0 = \sqrt{\frac{s}{m}}\right)$ zijn de beide eerste termen van vergelijking (8) te verwaarloozen t.o.v. de term sx. De verhouding tusschen het opgewekte potentiaalverschil en den geluidsdruk is dan onafhankelijk van de frequentie. Dit is gewenscht voor een goede

weergave. Het verdient daarom aanbeveling de resonantiefrequentie, behoorende bij de doorbuiging van de plaatjes op de steunpunten, hooger dan de hoogste weer te geven frequentie te leggen. Boven de resonantiefrequentie speelt de term $m\ddot{x}$ ($= -\omega^2 mx$) in het eerste lid van (8) de grootste rol. De amplitude van het opgewekte potentiaalverschil neemt bij constante amplitude van den geluidsdruk af met het kwadraat van de frequentie [13]).

Pick-up

Bij een pick-up moet een heen- en weergaande beweging van de naald omgezet worden in een electrische wisselspanning. Zooals uit fig. 7*a* blijkt, heeft deze beweging een torsie van het kristal tot

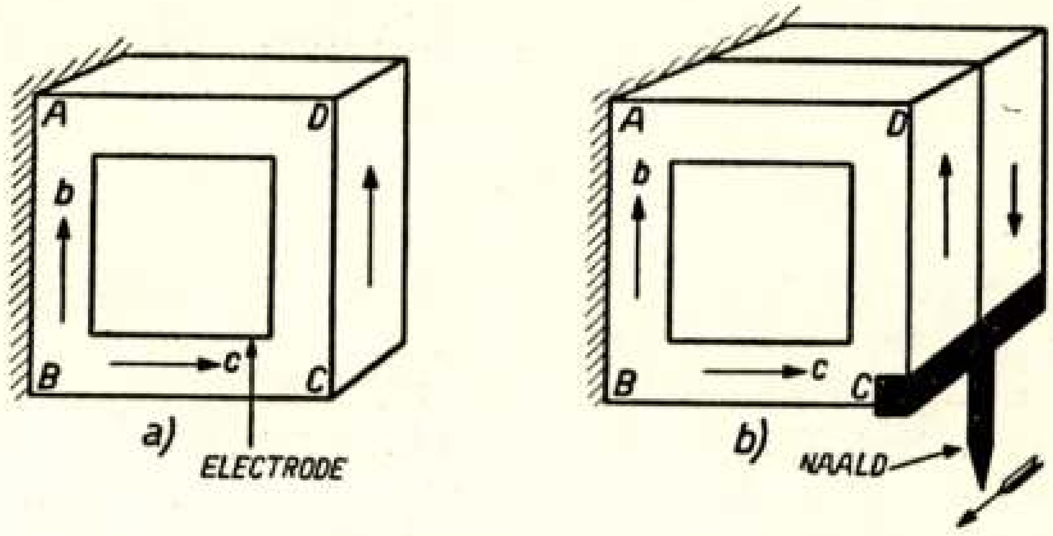


Fig. 7. Opbouw van een kristalpick-up.

gevolg. De kristalplaatjes worden nu *evenwijdig* met de *b*- en *c*-as gesneden. Is van een dergelijk plaatje de zijde *AB* ingeklemd, dan zal, als tusschen vóór- en achtervlak een electrisch spanningsverschil bestaat, de zijde *CD* tengevolge van de afschuiving in de aangegeven richting bewegen. Worden wederom twee plaatjes met hun *a*-as in tegengestelde richting op elkaar gekit (fig. 7*b*), dan zal, als tusschen vóór- en achtervlak van dit bimorfe element een electrisch spanningsverschil bestaat, een torsie van het element optreden om de as *BC*. Wordt omgekeerd de naald bewogen in de aangegeven richting, b.v. heen en weer, dan ontstaat een electrisch spanningsverschil tusschen vóór- en achtervlak van het kristal)*.

Wat betreft de vermindering van den invloed van de temperatuur door de bimorfe constructie geldt hetzelfde als bij de microfoons.

---

*) Ook bij sommige microfoons, waarbij het kristal met behulp van een membraan wordt aangedreven, wordt deze torsieconstructie wel toegepast.

De groef in de plaat schrijft direct de beweging van de naald en daarmede de uitwijking van het kristal voor. De resonantiefrequentie speelt hierbij geen rol.

Bij constructie van luidsprekers wordt seignettezout niet veel toegepast. De resonantiefrequentie van het kristal (b.v. als opgelegde of ingeklemde plaat) ligt te hoog. Zij moet bij luidsprekers beneden het weer te geven frequentiespectrum liggen.

Gaarne betuig ik mijn dank aan Ir. B. D. H. Tellegen, voor enkele kritische opmerkingen.

Natuurkundig Laboratorium
der N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken,
Eindhoven/Holland

LITERATUUR:

Algemeen:

I. V. Kurtschatow, Le champ moléculaire dans les diélectriques, Parijs, 1936.
W. G. Cady, Am. Phys. Teacher **6**, 227, 1938.
P. Scherrer, Zts. für Electrochemie **45**, 171, 1939.

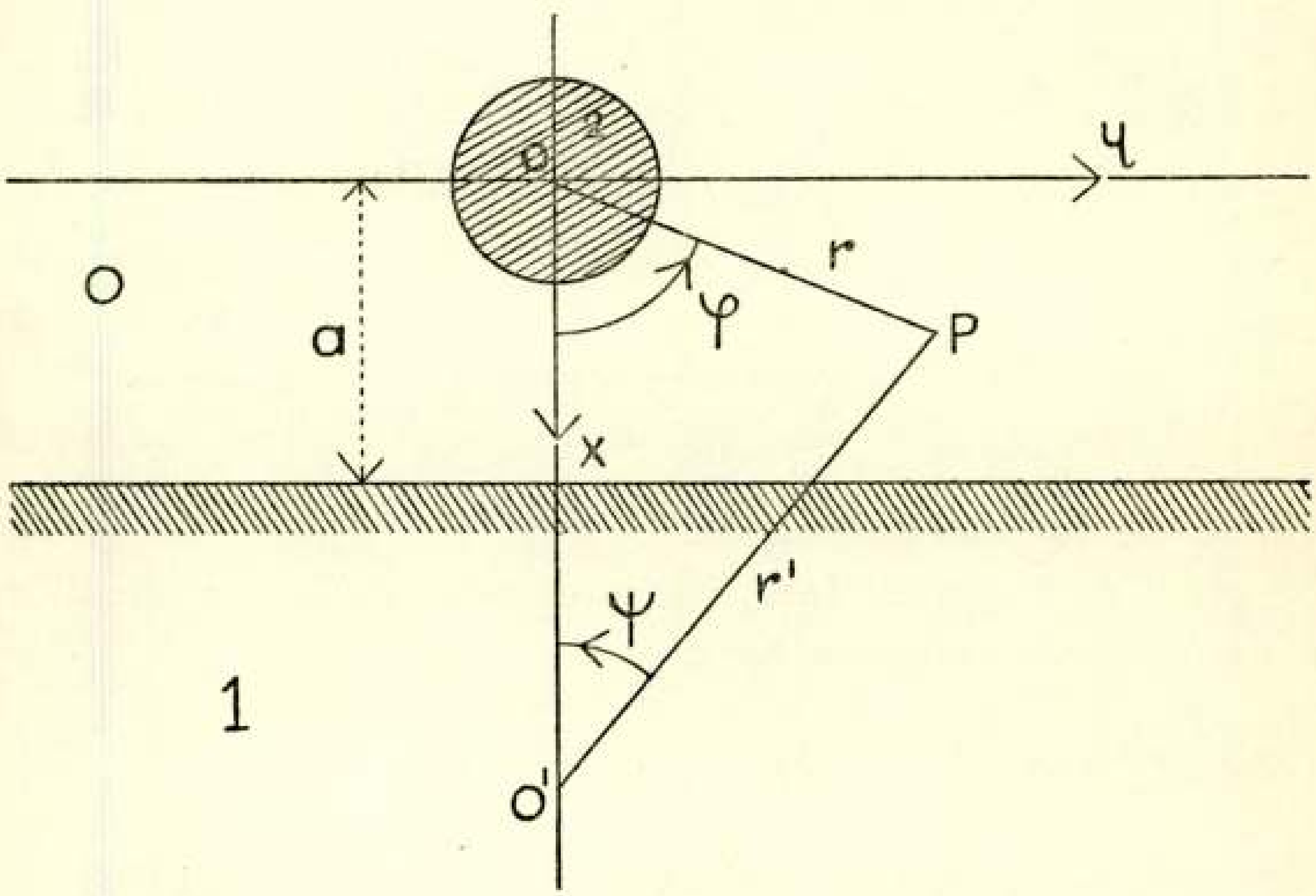
1) P. Terpstra, Ned. Tijdschr. voor Natuurk. **8**, 275, 1941.
2) B. D. H. Tellegen, Ned. Tijdschr. voor Natuurk. **8**, 270, 1941.
3) J. Hablützel, Helv. Phys. Acta. **12**, 489, 1939.
4) R. D. Schulwas-Sorokin, Zs. f. Phys. **73**, 700, 1932.
W. G. Cady, Proc. Phys. Soc. **49**, 646, 1937.
5) C. B. Sawyer, Proc. I.R.E. **19**, 2020, 1931.
6) H. Mueller, Phys. Rev. **57**, 829, 1940.
7) A. Rusterholz, Helv. Phys. Acta **8**, 39, 1934.
W. Bantle, P. Scherrer, Helv. Phys. Acta **13**, 214, 1940.
8) H. Mueller, Phys. Rev. **47**, 175, 1935.
9) G. Busch, Helv. Phys. Acta **11**, 269, 1938.
W. Lüdy, Zs. f. Phys. **113**, 302, 1939.
10) B. en I. V. Kurtschatow, Phys. Zs. Sowjet **3**, 320, 1933.
R. H. Fowler, Proc. Royal Soc. **149**, 1, 1935.
G. Busch, J. Hablützel, P. Scherrer, Helv. Phys. Acta **10**, 330, 1937.
11) H. Staub, Helv. Phys. Acta **7**, 1, 1934; **7**, 480, 1934.
12) C. B. Sawyer, Proc. I.R.E. **19**, 2020, 1931.
A. L. Williams, Soc. Mot. Pict. Eng. **23**, 196, 1934.
13) J. de Boer, Philips Techn. Tijdschrift **5**, 150, 1940.

HET ELECTROMAGNETISCH VELD VAN EEN ONEINDIG LANGEN CIRKELVORMIG-CYLINDRISCHEN STROOMGELEIDER EVENWIJDIG AAN EEN DOOR EEN PLAT VLAK BEGRENSDEN GELEIDER

door

G. J. ELIAS

Onderstaande figuur stelt eene doorsnede voor loodrecht op de beschrijvende lijnen van den cylindrischen stroomgeleider, welker richting we als Z-as zullen aannemen.



Den oorsprong van coördinaten kiezen we in het middelpunt der cirkelvormige doorsnede, de x-as loodrecht op het grensvlak van den vlakkengeleider, welk vlak zich op een afstand a van de as van den cylinder bevindt. Het punt O' is het spiegelpunt van O t.o.v. het grensvlak, zoodat de afstand OO' $2a$ bedraagt. De voerstralen uit O resp. O' noemen we r resp. r', de hoeken van die voetstralen met de x-as φ resp. ψ, die positief geteld worden in de aangegeven richtingen, terwijl ze voor de x-as nul zijn. Den straal van den cirkelvormigen cylinder noemen we ϱ.

We nemen aan, dat zoowel de cylindrische alsook de vlakke geleider een willekeurig geleidingsvermogen g en eene willekeurige diëlectrische constante ε en permaabiliteit μ hebben. Het medium van den cylinder duiden we aan met den index 2, dat van den vlakken geleider met den index 1, terwijl de index 0 het medium aanduidt, dat de overblijvende ruimte vult. Dit laatste medium kan eventueel ook geleidende eigenschappen bezitten, benevens eene van de eenheid verschillende diëlectrische constante en permeabiliteit.

We voeren cylindercoördinaten in, r, φ en z. Dan zijn de veldvergelijkingen van Maxwell

$$\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = \frac{ick^2}{\omega\mu} F_r\,, \quad \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = \frac{ick^2}{\omega\mu} F_\varphi\,,$$

$$\frac{\partial H_\varphi}{\partial r} + \frac{H_\varphi}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = \frac{ick^2}{\omega\mu} F_z \qquad 1)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial r} = -\frac{i\omega\mu}{c} H_r\,, \quad \frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} = -\frac{i\omega\mu}{c} H_\varphi\,,$$

$$\frac{\partial F_\varphi}{\partial r} + \frac{F_\varphi}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial F_r}{\partial \varphi} = -\frac{i\omega\mu}{c} H_z\,, \qquad 2)$$

waarin
$$k^2 = \frac{\varepsilon\mu\omega^2 - 4\pi i\omega g\mu}{c^2}\,,$$

terwijl ω de hoekfrequentie is.

De verg. g. 1) en 2) laten de volgende stellen uitdrukkingen voor de veldcomponenten toe:

$$F_z = A_n\,.\,(k^2 - q^2)\,.\,C_n(r\sqrt{k^2 - q^2})\,.\,e^{iqz}\cos n\varphi$$

$$F_r = A_n\,.\,iq\sqrt{k^2 - q^2}\,.\,C_n'(r\sqrt{k^2 - q^2})\,.\,e^{iqz}\,.\cos n\varphi$$

$$F_\varphi = -A_n\,.\,\frac{inq}{r}\,C_n(r\sqrt{k^2 - q^2})\,.\,e^{iqz}\,.\sin n\varphi \qquad 3)$$

$$H_r = -A_n\,.\,\frac{ick^2}{\omega\mu}\,.\,\frac{n}{r}\,C_n(r\sqrt{k^2 - q^2})\,e^{iqz}\,.\sin n\varphi$$

$$H_\varphi = -A_n\,.\,\frac{ick^2}{\omega\mu}\sqrt{k^2 - q^2}\,.\,C_n'(r\sqrt{k^2 - q^2})\,e^{iqz}\,.\cos n\varphi$$

$$H_z = 0$$

$$
\begin{aligned}
H_z &= - B_n \frac{ick^2}{\omega\mu} \sqrt{k^2 - q^2}\, C_n(r\sqrt{k^2 - q^2}) \,.\, e^{iqz} \sin n\varphi \\
H_r &= B_n \,.\, \frac{ck^2}{\omega\mu} \,.\, q \,.\, C_n'(r\sqrt{k^2 - q^2}) \,.\, e^{iqz} \,.\, \sin n\varphi \\
H_\varphi &= B_n \,.\, \frac{ck^2}{\omega\mu} \,.\, nq \frac{C_n(r\sqrt{k^2 - q^2})}{r\sqrt{k^2 - q^2}} \,.\, e^{iqz} \,.\, \cos n\varphi \qquad\qquad 4) \\
F_r &= - B_n \,.\, \frac{k^2 n}{r\sqrt{k^2 - q^2}} C_n(r\sqrt{k^2 - q^2}) \,.\, e^{iqz} \,.\, \cos n\varphi \\
F_\varphi &= B_n \,.\, k^2 \,.\, C_n(r\sqrt{k^2 - q^2}) \,.\, e^{iqz} \,.\, \sin n\varphi \\
F_z &= o
\end{aligned}
$$

Hierin stelt C_n een cylinderfunctie van de orde n voor, terwijl A_n en B_n willekeurige constanten zijn. In 't algemeen zal eene som van de uitdrukkingen 3) en 4) voldoen, waarbij naar den index n gesommeerd wordt.

Nu geldt

$$
F_y = F_r \sin\varphi + F_\varphi \cos\varphi \quad , \quad H_y = H_r \sin\varphi + H_\varphi \cos\varphi
$$

Met behulp van de uitdrukkingen 3) wordt hiermede verkregen na een eenvoudige transformatie

$$
\begin{aligned}
F_y &= - A_n \frac{iq}{2} \sqrt{k^2 - q^2} \Big[C_{n-1}(r\sqrt{k^2 - q^2}) \sin(n - 1)\varphi + \\
&\quad + C_{n+1}(r\sqrt{k^2 - q^2}) \sin(n + 1)\varphi \Big] \,.\, e^{iqz} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 5) \\
H_y &= - A_n \frac{ick^2}{2\omega\mu} \sqrt{k^2 - q^2} \Big[C_{n-1}(r\sqrt{k^2 - q^2}) \cos(n - 1)\varphi - \\
&\quad - C_{n+1}(r\sqrt{k^2 - q^2}) \cos(n + 1)\varphi \Big] \,.\, e^{iqz}
\end{aligned}
$$

Op soortgelijke wijze verkrijgen we met behulp van 4).

$$
\begin{aligned}
F_y &= B_n \frac{k^2}{2} \Big[C_{n-1}(r\sqrt{k^2 - q^2}) \sin(n - 1)\varphi - \\
&\quad - C_{n+1}(r\sqrt{k^2 - q^2}) \sin(n + 1)\varphi \Big] \,.\, e^{iqz} \qquad 6)
\end{aligned}
$$

$$H_y = B_n \frac{ck^2 q}{2\omega\mu} \left[C_{n-1} (r\sqrt{k^2 - q^2}) \cos (n - 1) \varphi + \right. \tag{6)}$$

$$\left. + C_{n+1} (r\sqrt{k^2 - q^2}) \cos (n + 1) \varphi \right] . e^{iqz}$$

De vergelijkingen 5) en 6) kunnen ook als volgt geschreven worden, waar men zich gemakkelijk van kan overtuigen

$$F_y = A_n . iq . \frac{\partial}{\partial y} \left\{ C_n (r\sqrt{k^2 - q^2}) \cos n \varphi \right\} . e^{iqz}$$

$$H_y = - A_n \frac{ick^2}{\omega\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ C_n (r\sqrt{k^2 - q^2}) \cos n \varphi \right\} . e^{iqz} \tag{5a)}$$

$$F_y = B_n \frac{k^2}{\sqrt{k^2 - q^2}} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ C_n (r\sqrt{k^2 - q^2}) \sin n \varphi \right\} . e^{iqz}$$

$$H_y = B_n \frac{ck^2 q}{\omega\mu\sqrt{k^2 - q^2}} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ C_n (r\sqrt{k^2 - q^2}) \sin n \varphi \right\} . e^{iqz} \tag{6a)}$$

Ook deze uitdrukkingen kunnen gesuperponeerd en naar n gesommeerd worden.

Bij de uitdrukkingen (5a) en (6a) is r de voerstraal vanuit O naar een veldpunt P. Hieraan kunnen gelijksoortige uitdrukkingen worden toegevoegd, waarbij echter niet wordt uitgegaan van het centrum O, doch van O', dat het spiegelbeeld is van O ten opzichte van het grensvlak tusschen de media o en 1. De coördinaten zijn dan niet meer r en φ, doch r' en ψ, zoodat $C_n(r\sqrt{k^2-q^2}) . \cos n\varphi$ vervangen wordt door $C_n(r'\sqrt{k^2 - q^2}) . \cos n\psi$, resp. $C_n(r\sqrt{k^2 - q^2}) . \sin n\varphi$ door $C_n(r'\sqrt{k^2 - q^2}) . \sin n\psi$. We kunnen dan gebruik maken van de bekende navolgende betrekkingen van cylinderfuncties

$$C_n (r'\sqrt{k^2-q^2}) \cos n\psi = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} C_{n+m}(2a\sqrt{k^2-q^2}) I_m (r\sqrt{k^2-q^2}) \cos m\varphi$$

$$C_n (r'\sqrt{k^2-q^2}) \sin n\psi = -\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} C_{n+m}(2a\sqrt{k^2-q^2}) I_m (r\sqrt{k^2-q^2}) \sin m\varphi, \tag{7)}$$

waarbij in de laatste vergelijking het negatieve teeken een gevolg is van de definitie der hoeken φ en ψ.

Daarbij zijn r, r' en $2a$ de zijden van een driehoek, φ en ψ de resp. tegenover r' en r gelegen hoeken van dien driehoek

$(\Delta OPO')$, terwijl ondersteld is $2a > r$. Door sommatie naar n komen we tot de volgende oplossingen voor de veldcomponenten F_z en H_z in het medium o:

$$F_{oz} = (k_o^2 - q^2) \cdot e^{iqz} \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \Big[a_n' H_n^{(2)} (r\sqrt{k_o^2 - q^2}) \cos n\varphi +$$

$$+ a_n'' H_n^{(2)} (r' \sqrt{k_o^2 - q^2}) \cos n\psi \Big] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \; 8)$$

$$H_{oz} = - \frac{ick_o^2}{\omega \mu_o} \sqrt{k_o^2 - q^2} \cdot e^{iqz} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \Big[b_n' \cdot H_n^{(2)} (r\sqrt{k_o^2 - q^2}) \sin n\varphi +$$

$$+ b_n'' H_n^{(2)} (r' \sqrt{k_o^2 - q^2}) \cdot \sin n\psi \Big] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \; 9)$$

waarin $H_n^{(2)}$ de functie van Hankel van de tweede soort beteekent, welke functie we hier blijkbaar moeten gebruiken, aangezien deze in het oneindige verdwijnt, terwijl r en r' niet nul worden in het medium o. Is $r < 2a$, dan kunnen we op grond van (r) schrijven

$$F_{oz} = (k_o^2 - q^2) \cdot e^{iqz} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \Big[a_n' H_n^{(2)} (r\sqrt{k_o^2 - q^2}) \cdot \cos n\varphi +$$

$$+ a_n'' \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} H_{n+m}^{(2)} (2a\sqrt{k_o^2 - q^2}) I_m (r\sqrt{k_o^2 - q^2}) \cos m\varphi \Big] \quad 8a)$$

$$H_{oz} = - \frac{ick_o^2}{\omega \mu_o} \sqrt{k_o^2 - q^2} \cdot e^{iqz} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \Big[b_n' H_n^{(2)} (r\sqrt{k_o^2 - q^2}) \sin n\varphi -$$

$$- b_n'' \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} H_{n+m}^{(2)} (2a\sqrt{k_o^2 - q^2}) I_m (r\sqrt{k_o^2 - q^2}) \sin m\varphi \Big] \quad 9a)$$

Aan 8) en 9) beantwoorden op grond van 5a) en 6a) de navolgende veldcomponenten

$$F_{oy} = iq \cdot e^{iqz} \frac{\partial}{\partial y} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \Big[a'_n H^{(2)}_n (r\sqrt{k_o^2 - q^2}) \cos n\varphi +$$

$$+ a''_n H^{(2)}_n (r'\sqrt{k_o^2 - q^2}) \cos n\psi \Big] +$$

$$+ \frac{k_o^2}{\sqrt{k_o^2 - q^2}} e^{iqz} \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \Big[b'_n H^{(2)}_n (r\sqrt{k_o^2 - q^2}) \sin n\varphi + \qquad 10)$$

$$+ b''_n H^{(2)}_n (r'\sqrt{k_o^2 - q^2}) \sin n\psi \Big]$$

$$H_{oy} = - \frac{ick_o^2}{\omega\mu_o} e^{iqz} \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \Big[a'_n H^{(2)}_n (r\sqrt{k_o^2 - q^2}) \cos n\varphi +$$

$$+ a''_n H^{(2)}_n (r'\sqrt{k_o^2 - q^2}) \cos n\psi \Big] + \qquad 11)$$

$$+ \frac{ck_o^2 q}{\omega\mu_o\sqrt{k_o^2 - q^2}} e^{iqz} \frac{\partial}{\partial y} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \Big[b'_n H^{(2)}_n (r\sqrt{k_o^2 - q^2}) \sin n\varphi +$$

$$+ b''_n H^{(2)}_n (r'\sqrt{k_o^2 - q^2}) \sin n\psi \Big]$$

Voor de functies van Hankel voeren we nu in de integralen van Sommerfeld. Onder voorwaarde, dat $-\frac{\pi}{2} < \varphi < +\frac{\pi}{2}$, leiden deze tot de volgende uitdrukkingen

$$H^{(2)}_n (r\sqrt{k_o^2 - q^2}) \cos n\varphi =$$

$$= \frac{(-i)^n}{\pi} \int_{-i\infty+\eta}^{i\infty+2\pi-\eta} e^{ix\sqrt{k_o^2 - q^2}\cos\chi} \cos(y\sqrt{k_o^2 - q^2}\sin\chi) \cdot e^{in\chi} d\chi$$

12)

$$H^{(2)}_n (r\sqrt{k_o^2 - q^2}) \sin n\varphi =$$

$$= \frac{(-i)^n}{\pi} \int_{-i\infty+\eta}^{i\infty+2\pi-\eta} e^{ix\sqrt{k_o^2 - q^2}\cos\chi} \cdot \sin(y\sqrt{k_o^2 - q^2}\sin\chi) \cdot e^{in\chi} \cdot d\chi \,,$$

waarin $\eta = \frac{\pi}{2} + \alpha$, indien α gegeven is door $\sqrt{k_o^2 - q^2} =$

$-\left|\sqrt{k_o^2-q^2}\right| e^{-i\alpha}$ Onder invoering hiervan wordt verkregen uit 8) en 9)

$$F_{oz}=\frac{1}{\pi}(k_o^2-q^2)e^{iqz}\left[\int_{-i\infty+\eta}^{i\infty+2\pi-\eta} e^{ix\sqrt{k_o^2-q^2}\cos\chi}\,.\cos\left(y\sqrt{k_o^2-q^2}\sin\chi\right).\right.$$
$$.\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-i)^n a_n'.e^{in\chi}\,d\chi+$$
$$+\int_{-i\infty+\eta}^{i\infty+2\pi-\eta} e^{i(2a-x)\sqrt{k_o^2-q^2}\cos\chi}\,.\cos\left(y\sqrt{k_o^2-q^2}\sin\chi\right). \qquad 13)$$
$$\left..\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-i)^n.a_n''.e^{in\chi}\,d\chi\right]$$

$$H_{oz}=-\frac{1}{\pi}\frac{ick_o}{\omega\mu_o}\sqrt{k_o^2-q^2}\,.\,e^{iqz}\left[\int_{-i\infty+\eta}^{i\infty+2\pi-\eta} e^{ix\sqrt{k_o^2-q^2}\cos\chi}\,.\right.$$
$$.\sin\left(y\sqrt{k_o^2-q^2}\sin\chi\right)\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-i)^n b_n' e^{in\chi}\,d\chi+ \qquad 14)$$
$$+\int_{-i\infty+\eta}^{i\infty+2\pi-\eta} e^{i(2a-x)\sqrt{k_o^2-q^2}\cos\chi}\,.$$
$$\left..\sin\left(y\sqrt{k_o^2-q^2}\sin\chi\right)\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-i)^n b_n'' e^{in\chi}\,d\chi\right]$$

Voorzoover als cylindercoördinaten ingevoerd waren r' en ψ (met O' als middelpunt), zijn als orthogonale coördinaten $2a-x$ en y gebezigd in plaats van x en y.

Onder invoering van

$$f_{oa'}=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-i)^n.a_n'.e^{in\chi} \qquad f_{oa''}=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-i)^n.a_n''.e^{in\chi}$$
$$\qquad 15)$$
$$f_{ob'}=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-i)^n b_n'.e^{in\chi} \qquad f_{ob''}=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-i)^n b_n''.e^{in\chi}$$

geven de verg. g. 13) en 14)

$$F_{oz} = \frac{I}{\pi}(k_o^2 - q^2)\,e^{iqz}\Bigg[\int\limits_{-i\infty+\eta}^{i\infty+2\pi-\eta} e^{ix\sqrt{k_o^2-q^2}\,.\cos\chi}\cos\left(y\sqrt{k_o^2-q^2}\sin\chi\right).f_{oa'}.\,d\chi\,+$$

$$+\int\limits_{-i\infty+\eta}^{i\infty+2\pi-\eta} e^{i(2a-x)\sqrt{k_o^2-q^2}\cos\chi}.\cos\left(y\sqrt{k_o^2-q^2}\sin\chi\right)f_{oa''}.\,d\chi\Bigg] \qquad 13a)$$

$$H_{oz} = -\frac{I}{\pi}\frac{ick_o^2}{\omega\mu_o}\sqrt{k_o^2-q^2}\,.\,e^{iqz}\Bigg[\int\limits_{-i\infty+\eta}^{i\infty+2\pi-\eta} e^{ix\sqrt{k_o^2-q^2}\cos\chi}\sin\left(y\sqrt{k_o^2-q^2}\sin\chi\right).f_{ob'}.\,d\chi\,+$$

$$+\int\limits_{-i\infty+\eta}^{i\infty+2\pi-\eta} e^{i(2a-x)\sqrt{k_o^2-q^2}\,.\cos\chi}.\sin\left(y\sqrt{k_o^2-q^2}\sin\chi\right).f_{ob''}.\,d\chi\Bigg] \qquad 14a)$$

Gebruik makende van 5a) en 6a) wordt verder verkregen

$$F_{oy} = \frac{iq}{\pi}\,e^{iqz}\,\frac{\partial}{\partial y}\Bigg[\int\limits_{-i\infty+\eta}^{i\infty+2\pi-\eta} e^{ix\sqrt{k_o^2-q^2}\cos\chi}.\cos\left(y\sqrt{k_o^2-q^2}\sin\chi\right).f_{oa'}.\,d\chi\,+$$

$$+\int\limits_{i-\infty+\eta}^{i\infty+2\pi-\eta} e^{i(2a-x)\sqrt{k_o^2-q^2}\cos\chi}.\cos\left(y\sqrt{k_o^2-q^2}\sin\chi\right).f_{oa''}.\,d\chi\Bigg]\,+$$

$$16)$$

$$+\frac{I}{\pi}\frac{k_o^2}{\sqrt{k_o^2-q^2}}\,e^{iqz}\,\frac{\partial}{\partial x}\Bigg[\int\limits_{-i\infty+\eta}^{i\infty+2\pi-\eta} e^{ix\sqrt{k_o^2-q^2}\cos\chi}.\sin\left(y\sqrt{k_o^2-q^2}\sin\chi\right).f_{ob'}.\,d\chi\,+$$

$$+\int\limits_{-i\infty+\eta}^{i\infty+2\pi-\eta} e^{i(2a-x).\sqrt{k_o^2-q^2}\cos\chi}.\sin\left(y\sqrt{k_o^2-q^2}\sin\chi\right)f_{ob''}.\,d\chi\Bigg]$$

$$H_{oy} = -\frac{I}{\pi}\frac{ick_o^2}{\omega\mu_o}\,e^{iqz}\,\frac{\partial}{\partial x}\Bigg[\int\limits_{-i\infty+\eta}^{i\infty+2\pi-\eta} e^{ix\sqrt{k_o^2-q^2}\cos\chi}.\cos\left(y\sqrt{k_o^2-q^2}\sin\chi\right).f_{oa'}.\,d\chi\,+$$

$$+\int_{-i\infty+\eta}^{i\infty+2\pi-\eta} e^{i(2a-x)\sqrt{k_o^2-q^2}\cos\chi} \, . \cos(y\sqrt{k_o^2-q^2}\sin\chi) \, . f_{oa''} \, . \, d\chi \Big] +$$

$$+\frac{1}{\pi}\frac{ck_o^2 q^2}{\omega\mu_o\sqrt{k_o^2-q^2}} \, . \, e^{iqz}\frac{\partial}{\partial y}\Big[\int_{-i\infty+\eta}^{i\infty+2\pi-\eta} e^{ix\sqrt{k_o^2-q^2}\, . \cos\chi} \, .$$

$$. \sin(y\sqrt{k_o^2-q^2}\sin\chi) \, . f_{ob'} \, . \, d\chi +$$

$$+\int_{-i\infty+\eta}^{i\infty+2\pi-\eta} e^{i(2a-x)\sqrt{k_o^2-q^2}\cos\chi} \, . \sin(y\sqrt{k_o^2-q^2}\sin\chi) \, . f_{ob''} \, . \, d\chi \Big] \qquad 17)$$

Overeenkomstig de uitdrukkingen 13a), 14a), 16) en 17) stellen we voor het medium I:

$$F_{Iz} = \frac{1}{\pi}(k_I^2 - q^2)\, e^{iqz}\int_{-i\infty+\eta}^{i\infty+2\pi-\eta} e^{ix\sqrt{k_I^2-q^2}\, . \cos\chi_I} \, .$$

$$. \cos(y\sqrt{k_I^2-q^2}\sin\chi_I)\, f_{Ia}\, d\chi_I \qquad 18)$$

$$H_{Iz} = -\frac{1}{\pi}\frac{ick_I^2}{\omega\mu_I}\sqrt{k_I^2-q^2} \, . \, e^{iqz}\int_{-i\infty+\eta}^{i\infty+2\pi-\eta} e^{ix\sqrt{k_I^2-q^2}\, . \cos\chi_I} \, .$$

$$. \sin(y\sqrt{k_I^2-q^2}\sin\chi_I)\, f_{Ib} \, . \, d\chi_I \qquad 19)$$

$$H_{Iy} = -\frac{1}{\pi}\frac{ick_I^2}{\omega\mu_I} \, . \, e^{iqz} \, . \, \frac{\partial}{\partial x}\int_{-i\infty+\eta}^{i\infty+2\pi-\eta} e^{ix\sqrt{k_I^2-q^2}\cos\chi_I} \, .$$

$$. \cos(y\sqrt{k_I^2-q^2}\sin\chi_I) \, . f_{Ia} \, . \, d\chi_I + \qquad 20)$$

$$+\frac{1}{\pi}\frac{ck_I^2 q}{\omega\mu_I\sqrt{k_I^2-q^2}} \, . \, e^{iqz}\frac{\partial}{\partial y}\int_{-i\infty+\eta}^{i\infty+2\pi-\eta} e^{ix\sqrt{k_I^2-q^2}\, . \cos\chi_I} \, .$$

$$. \sin(y\sqrt{k_I^2-q^2}\sin\chi_I) \, . f_{Ib} \, . \, d\chi_I$$

$$F_{1y} = \frac{iq}{\pi} e^{iqz} \frac{\partial}{\partial y} \int\limits_{-i\infty+\eta}^{i\infty+2\pi-\eta} e^{ix\sqrt{k_1^2-q^2}\,.\,\cos\chi_1} \,.$$

$$.\cos\left(y\sqrt{k_1^2-q^2}\sin\chi_1\right).f_{1a}.\,d\chi_1 + \qquad 21)$$

$$+\frac{1}{\pi}\frac{k_1^2}{\sqrt{k_1^2-q^2}}.\,e^{iqz}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{-i\infty+\eta}^{i\infty+2\pi-\eta} e^{ix\sqrt{k_1^2-q^2}\,.\,\cos\chi_1}\,.$$

$$.\sin\left(y\sqrt{k_1^2-q^2}\sin\chi_1\right).f_{1b}.\,d\chi_1$$

Nu vereischen de randvoorwaarden, dat voor $x = a$
$F_{oz} = F_{1z}$, $H_{oz} = H_{1z}$, $F_{oy} = F_{1y}$, $H_{oy} = H_{1y}$
Door in de verg. g. 13a), 14a), 16), 17), 18), 19), 20) en 21) $x = a$ te stellen vinden we, dat de randvoorwaarden vervuld zijn, indien voldaan is aan de verg. g.

$$\sqrt{k_o^2-q^2}\,.\,\sin\chi = \sqrt{k_1^2-q^2}\,.\,\sin\chi_1$$

$$(k_o^2-q^2)\,e^{ia\sqrt{k_o^2-q^2}\,.\,\cos\chi}\,.\,(f_{oa'}+f_{oa''}) =$$

$$= (k_1^2-q^2)\,e^{ia\sqrt{k_1^2-q^2}\,.\,\cos\chi_1} f_{1a}\frac{d\chi_1}{d\chi}$$

$$\frac{k_o}{\mu_o}\sqrt{k_o^2-q^2}\,.\,e^{ia\sqrt{k_o^2-q^2}\,.\,\cos\chi}\,(f_{ob'}+f_{ob''}) =$$

$$= \frac{k_1}{\mu_1}\sqrt{k_1^2-q^2}\,e^{ia\sqrt{k_1^2-q^2}\,.\,\cos\chi_1}\,.\,f_{1b}\,.\,\frac{d\chi_1}{d\chi}$$

$$\frac{k_o^2}{\mu_o}\sqrt{k_o^2-q^2}\,e^{ia\sqrt{k_o^2-q^2}\,.\,\cos\chi}\,.\,\cos\chi\,.\,(f_{oa'}-f_{oa''}) + \qquad 22)$$

$$+\frac{k_o^2\,q}{\mu_o}\,e^{ia\sqrt{k_o^2-q^2}\,.\,\cos\chi}\,.\,\sin\chi\,.\,(f_{ob'}+f_{ob''}) =$$

$$= \left[\frac{k_1^2}{\mu_1}\sqrt{k_1^2-q^2}\,.\,e^{ia\sqrt{k_1^2-q^2}\,.\,\cos\chi_1}\cos\chi_1\,.\,f_{1a} + \right.$$

$$\left. + \frac{k_1^2\,q}{\mu_1}\,e^{ia\sqrt{k_1^2-q^2}\,.\,\cos\chi_1}\,.\,\sin\chi_1\,.\,f_{1b}\right].\,\frac{d\chi_1}{d\chi}$$

$$- q \sqrt{k_o^2 - q^2} \, . \, e^{ia\sqrt{k_o^2 - q^2} \, . \, \cos\chi} \, . \, \sin\chi \, . \, (f_{oa'} +$$

$$+ f_{oa''}) + k_o^2 \, e^{ia\sqrt{k_o^2 - q^2} \, . \, \cos\chi} \, . \, \cos\chi \, . \, (f_{ob'} - f_{ob''}) =$$

$$= \left[- q \sqrt{k_1^2 - q^2} \, . \, e^{ia\sqrt{k_1^2 - q^2} \, . \, \cos\chi_1} \, . \, \sin\chi_1 \, . \, f_{1a} + \right.$$

$$\left. + k_1^2 \, e^{ia\sqrt{k_1^2 - q^2} \, . \, \cos\chi_1} \, . \, \cos\chi_1 \, . \, f_{1b} \right] \, . \, \frac{d\chi_1}{d\chi} \qquad 22)$$

Uit de vijf vergelijkingen 22) kunnen χ_1 , f_{1a} en f_{1b} worden geëlimineerd, waarna er twee verg. g. overblijven tusschen $f_{oa'}$, $f_{oa''}$, $f_{ob'}$ en $f_{ob''}$.

Voor het medium *2* kan gesteld worden

$$F_{2z} = (k_2^2 - q^2) \, e^{iqz} \sum_{n=0}^{\infty} A_n I_n (r \sqrt{k_2^2 - q^2}) \cos n\varphi \qquad 23)$$

$$H_{2z} = - \frac{ick_2^2}{\omega\mu_2} \sqrt{k_2^2 - q^2} \, . \, e^{iqz} \sum_{n=0}^{\infty} B_n I_n (r \sqrt{k_2^2 - q^2}) \sin n\varphi \qquad 24)$$

Onder gebruikmaking van 3) volgt hieruit

$$F_{2\varphi} = - \frac{iq}{r} \, e^{iqz} \sum_{n=1}^{\infty} n \, A_n I_n (r \sqrt{k_2^2 - q^2}) \sin n\varphi +$$

$$+ k_2^2 \, e^{iqz} \sum_{n=1}^{\infty} B_n I'_n (r \sqrt{k_2^2 - q^2}) \sin n\varphi \qquad 25)$$

$$H_{2\varphi} = - \frac{ick_2^2}{\omega\mu_2} \sqrt{k_2^2 - q^2} \, . \, e^{iqz} \sum_{n=0}^{\infty} A_n I'_n (r \sqrt{k_2^2 - q^2}) \cos n\varphi +$$

$$+ \frac{ck_2^2 \, q}{\omega\mu_2} \, e^{iqz} \sum_{n=1}^{\infty} n \, B_n \frac{I_n (r \sqrt{k_2^2 - q^2})}{r \sqrt{k_2^2 - q^2}} \cos n\varphi \qquad 26)$$

Voor F_{oz} en H_{oz} bezigen we de uitdrukkingen 8a) en 9a), die we na verwisseling van de indices *n* en *m* kunnen schrijven

$$F_{oz} = (k_o^2 - q^2) \, e^{iqz} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left[a'_n H_n^{(2)} (r \sqrt{k_o^2 - q^2}) + \right.$$

$$\left. + I_n (r \sqrt{k_o^2 - q^2}) \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} a''_m H_{n+m}^{(2)} (2a \sqrt{k_o^2 - q^2}) \right] \cos n\varphi \qquad 8b)$$

$$H_{oz} = -\frac{ick_o^2}{\omega\mu_o}\sqrt{k_o^2 - q^2}\,.\,e^{iqz}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\Big[b'_n H_n^{(2)}(r\sqrt{k_o^2 - q^2}) -$$

$$- I_n(r\sqrt{k_o^2 - q^2})\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} b''_m H_{n+m}^{(2)}(2a\sqrt{k_o^2 - q^2})\Big] \sin n\varphi \qquad 9b)$$

Gebruikmakende van 3) verkrijgen we hieruit

$$F_{o\varphi} = -\frac{iq}{r}e^{iqz}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\Big[a'_n H_n^{(2)}(r\sqrt{k_o^2 - q^2}) +$$

$$+ I_n(r\sqrt{k_o^2 - q^2})\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} a''_m H_{n+m}^{(2)}(2a\sqrt{k_o^2 - q^2})\Big]\,.\,n \sin n\varphi +$$

$$+ k_o^2 e^{iqz}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\Big[b'_n H_n^{(2)'}(r\sqrt{k_o^2 - q^2}) - \qquad 27)$$

$$- I'_n(r\sqrt{k_o^2 - q^2})\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} b''_m H_{n+m}^{(2)}(2a\sqrt{k_o^2 - q^2})\Big] \sin n\varphi$$

$$H_{o\varphi} = -\frac{ick_o^2}{\omega\mu_o}\sqrt{k_o^2 - q^2}\,.\,e^{iqz}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\Big[a'_n H_n^{(2)'}(r\sqrt{k_o^2 - q^2}) +$$

$$+ I'_n(r\sqrt{k_o^2 - q^2})\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} a''_m H_{n+m}^{(2)}(2a\sqrt{k_o^2 - q^2})\Big] \cos n\varphi +$$

$$+ \frac{ck_o^2 q}{\omega\mu_o r\sqrt{k_o^2 - q^2}}\,.\,e^{iqz}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\Big[b'_n H_n^{(2)}(r\sqrt{k_o^2 - q^2}) - \qquad 28)$$

$$- I_n(r\sqrt{k_o^2 - q^2})\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} b''_m H_{n+m}^{(2)}(2a\sqrt{k_o^2 - q^2})\Big]\,.\,n \cos n\varphi$$

De randvoorwaarden vereischen nu, dat voor $r = \varrho$

$F_{oz} = F_{2z}$, $H_{oz} = H_{2z}$, $F_{o\varphi} = F_{2\varphi}$, $H_{o\varphi} = H_{2\varphi}$ moet zijn.

Uit de verg. g. 8b), 9b), 23), 24), 25), 26), 27) en 28) wordt dan verkregen

$$(k_o^2 - q^2) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \cos n\varphi \left[a_n' H_n^{(2)} (\varrho \sqrt{k_o^2 - q_2}) + \right.$$

$$\left. + I_n (\varrho \sqrt{k_o^2 - q^2}) \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} a_m'' H_{n+m}^{(2)} (2a \sqrt{k_o^2 - q^2} \right] =$$

$$= (k_2^2 - q^2) \sum_{n=o}^{n=+\infty} A_n \cos n\varphi \,.\, I_n (\varrho \sqrt{k_2^2 - q^2})$$

$$- \frac{ick_o^2}{\omega\mu_o} \sqrt{k_o^2 - q^2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \sin n\varphi \left[b_n' H_n^{(2)} (\varrho \sqrt{k_o^2 - q^2}) - \right.$$

$$\left. - I_n (\varrho \sqrt{k_o^2 - q^2}) \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} b_m'' H_{n+m}^{(2)} (2a \sqrt{k_o^2 - q^2}) \right] =$$

$$= - \frac{ick_2^2}{\omega\mu_2} \sqrt{k_2^2 - q^2} \sum_{n=1}^{n=+\infty} B_n \sin n\varphi \, I_n (\varrho \sqrt{k_2^2 - q^2})$$

$$- \frac{iq}{\varrho} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} n \sin n\varphi \left[a_n' H_n^{(2)} (\varrho \sqrt{k_o^2 - q^2}) + \right. \tag{29}$$

$$\left. + I_n (\varrho \sqrt{k_o^2 - q^2}) \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} a_m'' H_{n+m}^{(2)} (2a \sqrt{k_o^2 - q^2}) \right] +$$

$$+ k_o^2 \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \sin n\varphi \left[b_n' H_n^{(2)'} (\varrho \sqrt{k_o^2 - q^2}) - \right.$$

$$\left. - I_n' (\varrho \sqrt{k_o^2 - q^2}) \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} b_m'' H_{n+m}^{(2)} (2a \sqrt{k_o^2 - q^2}) \right] =$$

$$= - \frac{iq}{\varrho} \sum_{n=1}^{n=+\infty} n A_n I_n (\varrho \sqrt{k_2^2 - q^2}) \sin n\varphi +$$

$$+ k_2^2 \sum_{n=1}^{n=+\infty} B_n \sin n\varphi \,.\, I_n' (\varrho \sqrt{k_2^2 - q^2})$$

$$- \frac{ick_o^2}{\omega\mu_o} \sqrt{k_o^2 - q^2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \cos n\varphi \left[a_n' H_n^{(2)'} (\varrho \sqrt{k_o^2 - q^2}) + \right.$$

$$\left. + I_n' (\varrho \sqrt{k_o^2 - q^2}) \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} a_m'' H_{n+m}^{(2)} (2a \sqrt{k_o^2 - q^2}) \right] +$$

$$+ \frac{ck_o^2 q}{\omega\mu_o \varrho \sqrt{k_o^2 - q^2}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} n \cos n\varphi \left[b_n' H_n^{(2)} (\varrho \sqrt{k_o^2 - q^2}) - \right.$$

$$\left. - I_n (\varrho \sqrt{k_o^2 - q^2}) \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} b_m'' H_{n+m}^{(2)} (2a \sqrt{k_o^2 - q^2}) \right] =$$

$$= -\frac{ick_2^2}{\omega\mu_2}\sqrt{k_2^2-q^2}\sum_{n=0}^{n=+\infty} A_n I_n'(\varrho\sqrt{k_2^2-q^2})\cos n\varphi +$$

$$+\frac{ck_2^2 q}{\omega\mu_2}\sum_{n=1}^{n=+\infty} n\cos n\varphi \, . \, B_n\frac{I_n(\varrho\sqrt{k_2^2-q^2})}{\varrho\sqrt{k_2^2-q^2}} \qquad 29)$$

De verg. g. 29) moeten identiek vervuld zijn, waaruit volgt

$$(k_o^2-q^2)\Big[a_o' H_o^{(2)}(\varrho\sqrt{k_o^2-q^2})+$$

$$+ I_o(\varrho\sqrt{k_o^2-q^2})\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} a_m'' H_m^{(2)}(2a\sqrt{k_o^2-q^2})\Big] = \qquad 30)$$

$$= (k_2^2-q^2)\, . \, A_o \, . \, I_o(\varrho\sqrt{k_2^2-q^2})$$

$$\frac{k_o^2}{\mu_o}\sqrt{k_o^2-q^2}\Big[a_o' H_o^{(2)\prime}(\varrho\sqrt{k_o^2-q^2})+$$

$$+ I_o'(\varrho\sqrt{k_o^2-q^2})\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} a_m'' H_m^{(2)}(2a\sqrt{k_o^2-q^2})\Big] = \qquad 31)$$

$$= \frac{k_2^2}{\mu_2}\sqrt{k_2^2-q^2}\, . \, A_o \, . \, I_o'(\varrho\sqrt{k_2^2-q^2})$$

Voor $n \geqslant 1$ gelden de betrekkingen

$$(k_o^2-q^2)\Big[a_n' H_n^{(2)}(\varrho\sqrt{k_o^2-q^2})+$$

$$+ I_n(\varrho\sqrt{k_o^2-q^2})\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} a_m'' H_{n+m}^{(2)}(2a\sqrt{k_o^2-q^2})+$$

$$+ a_{-n} H_{-n}^{(2)}(\varrho\sqrt{k_o^2-q^2})+ \qquad 32)$$

$$+ I_{-n}(\varrho\sqrt{k_o^2-q^2})\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} a_m'' H_{-n+m}^{(2)}(2a\sqrt{k_o^2-q^2})\Big] =$$

$$= (k_2^2-q^2)\, . \, A_n \, . \, I_n(\varrho\sqrt{k_2^2-q^2})$$

$$\frac{k_o^2}{\mu_o}\sqrt{k_o^2-q^2}\Big[b_n' H_n^{(2)}(\varrho\sqrt{k_o^2-q^2})-$$

$$- I_n(\varrho\sqrt{k_o^2-q^2})\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} b_m'' H_{n+m}^{(2)}(\varrho\sqrt{k_o^2-q^2})-$$

$$- b'_{-n} H^{(2)}_{-n} (\varrho \sqrt{k_o^2 - q^2}) + \tag{33}$$

$$+ I_{-n} (\varrho \sqrt{k_o^2 - q^2}) \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} b''_m H^{(2)}_{-n+m} (2a \sqrt{k_o^2 - q^2}) \Big] -$$

$$= \frac{k_2^2}{\mu_2} \sqrt{k_2^2 - q^2} \, . \, B_n \, . \, I_n (\varrho \sqrt{k_2^2 - q^2})$$

$$- \frac{iqn}{\varrho} \Big[a'_n H^{(2)}_n (\varrho \sqrt{k_o^2 - q^2}) +$$

$$+ I_n (\varrho \sqrt{k_o^2 - q^2}) \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} a''_m H^{(2)}_{n+m} (2a \sqrt{k_o^2 - q^2}) +$$

$$+ a'_{-n} H^{(2)}_{-n} (\varrho \sqrt{k_o^2 - q^2}) +$$

$$+ I_{-n} (\varrho \sqrt{k_o^2 - q^2}) \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} a''_m H^{(2)}_{-n+m} (2a \sqrt{k_o^2 - q^2}) \Big] +$$

$$+ k_o^2 \Big[b'_n H^{(2)\prime}_n (\varrho \sqrt{k_o^2 - q^2}) -$$

$$- I'_n (\varrho \sqrt{k_o^2 - q^2}) \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} b''_m H^{(2)}_{n+m} (2a \sqrt{k_o^2 - q^2}) \Big] - \tag{34}$$

$$- b'_{-n} H^{(2)\prime}_{-n} (\varrho \sqrt{k_o^2 - q^2}) +$$

$$+ I'_{-n} (\varrho \sqrt{k_o^2 - q^2}) \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} b''_m H^{(2)}_{-n+m} (2a \sqrt{k_o^2 - q^2}) \Big] =$$

$$= - \frac{iqn}{\varrho} A_n I_n (\varrho \sqrt{k_2^2 - q^2}) + k_2^2 B_n I'_n (\varrho \sqrt{k_2^2 - q^2})$$

$$- \frac{i k_o^2 \sqrt{k_o^2 - q^2}}{\mu_o} \Big[a'_n H^{(2)\prime}_n (\varrho \sqrt{k_o^2 - q^2}) +$$

$$+ I'_n (\varrho \sqrt{k_o^2 - q^2}) \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} a''_m H^{(2)}_{n+m} (2a \sqrt{k_o^2 - q^2}) +$$

$$+ a'_{-n} H^{(2)\prime}_{-n} (\varrho \sqrt{k_o^2 - q^2}) +$$

$$+ I'_{-n} (\varrho \sqrt{k_o^2 - q^2}) \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} a''_m H^{(2)}_{-n+m} (2a \sqrt{k_o^2 - q^2}) \Big] +$$

$$+ \frac{k_o^2 q n}{\mu_o \varrho \sqrt{k_o^2 - q^2}} \Big[b'_n H^{(2)}_n (\varrho \sqrt{k_o^2 - q^2}) -$$

$$- I_n (\varrho \sqrt{k_o^2 - q^2}) \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} b''_m H^{(2)}_{n+m} (2a \sqrt{k_o^2 - q^2}) -$$

$$- b'_{-n} H^{(2)}_{-n} (\varrho\sqrt{k_o^2 - q^2}) +$$

$$+ I_{-n} (\varrho\sqrt{k_o^2 - q^2}) \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} b''_m H^{(2)}_{-n+m} (2a\sqrt{k_o^2 - q^2}) \Big] = \qquad 35)$$

$$= -\frac{ik_2^2\sqrt{k_2^2 - q^2}}{\mu_2} A_n I'_n (\varrho\sqrt{k_2^2 - q^2}) + \frac{k_2^2 q n}{\mu_2 \varrho\sqrt{k_2^2 - q^2}} B_n I_n (\varrho\sqrt{k_2^2 - q^2})$$

Uit de verg. g. 32) en 33) kunnen A_n en B_n worden gesubstitueerd in de verg. g. 34) en 35). Deze laatste twee geven dan met de twee verg. g., die uit de verg. g. 22) resulteerden, tezamen vier verg. g. ter bepaling der grootheden a'_n, a''_n, b'_n en b''_n in functie van de nog onbepaalde grootheden. Daarbij moeten de verg. g. 15) in acht genomen worden, waardoor tenslotte alleen de grootheden a'_n, A_o en q als onbekenden overblijven, aangezien b'_o uit de vergelijkingen blijkt weg te vallen. Van de grootheden a'_o, A_o en q, kunnen er twee worden bepaald uit de verg. g. 30) en 31), n.l. de grootheden a'_o en q, waarna A_o als noodzakelijke multiplicatieve constante overblijft, de waarde van A_o kan b.v. worden bepaald uit de stroomsterkte in den cylindrischen draad.

Bij de nadere beschouwing der boven behandelde vergelijkingen zullen we aannemen, dat, terwijl de media *1* en *2* geleiders zijn, het medium *o* een diëlectricum is zonder geleidingsvermogen. Verder zullen we ter vereenvoudiging onderstellen, dat de hoekfrequentie ω zeer klein is t.o.v. het geleidingsvermogen der geleiders *1* en *2*, dat verder de grootheid $\varrho\sqrt{k_2^2 - q^2}$ groot mag worden aangenomen, terwijl we tenslotte stellen $\mu_o = \mu_1 = \mu_2 = 1$.

Uit de laatste vier verg. g. van 22) volgt bij eliminatie van $f_{1a} \cdot e^{ia\sqrt{k_1^2 - q^2}\cos\chi_1} \cdot \frac{d\chi_1}{d\chi}$ en $f_{1b}\, e^{ia\sqrt{k_1^2 - q^2}\cos\chi_1} \cdot \frac{d\chi_1}{d\chi}$ algemeen

$$\frac{k_o^2}{\mu_o}\sqrt{k_o^2 - q^2} \cdot \cos\chi \cdot (f_{oa'} - f_{oa''}) + \frac{k_o^2 q}{\mu_o} \sin\chi \cdot (f_{ob'} + f_{ob''}) =$$

$$= \frac{k_1^2}{\mu_1} \frac{k_o^2 - q^2}{\sqrt{k_1^2 - q^2}} \cos\chi_1 \cdot (f_{oa'} + f_{oa''}) + \qquad 36)$$

$$+ \frac{\mu_1}{\mu_o^2} k_o k_1 q \frac{\sqrt{k_o^2 - q^2}}{\sqrt{k_1^2 - q^2}} \sin\chi_1 \cdot (f_{ob'} + f_{ob''})$$

$$-q\sqrt{k_o^2 - q^2}\, sin\, \chi \,.\, (f_{oa'} + f_{oa''}) + k_o^2 \cos \chi \,.\, (f_{ob'} - f_{ob''}) =$$

$$= - q \frac{k_o^2 - q^2}{\sqrt{k_1^2 - q^2}} \sin \chi_1 \,.\, (f_{oa'} + f_{oa''}) + \qquad 37)$$

$$+ \frac{\mu_1}{\mu_o} k_o k_1 \frac{\sqrt{k_o^2 - q^2}}{\sqrt{k_1^2 - q^2}} \cos \chi_1 \,.\, (f_{ob'} + f_{ob''})$$

Bij de thans gemaakte onderstellingen volgt uit 36) voor willekeurig kleine hoekfrequentie

$$f_{oa'} + f_{oa''} = 0 \qquad 38)$$

aangezien met de hoekfrequentie ω ook de grootheden q, k_o en $\sqrt{k_o^2 - q^2}$ zeer klein zullen worden, terwijl k_1 groot is, zoodat alleen de eerste term van het rechterlid van 36) overblijft.

Bij substitutie van 38) in 37) wordt verkregen met $\mu_o = \mu_1 = 1$

$$k_1\sqrt{k_o^2 - q^2} \,.\, \cos \chi_1 \,.\, (f_{ob'} + f_{ob''}) = k_o \sqrt{k_1^2 - q^2} \,.\, \cos \chi \,.\, (f_{ob'} - f_{ob''}) \qquad 39)$$

Naarmate aan de gestelde voorwaarden beter voldaan is, zal $\sqrt{k_o^2 - q^2}$ des te kleiner zijn, immers bij oneindig groot geleidings-vermogen van de geleiders 1 en 2 zal $k_o = q$ zijn, ook bij eindige frequentie. Op grond van deze overweging kunnen we het rechterlid van 39) bij benadering nul stellen, zoodat

$$f_{ob'} = f_{ob''} \qquad 40)$$

Met inachtneming van 15) wordt dan verkregen

$$b_n' = b_n'' \qquad 41)$$

terwijl op dezelfde wijze uit 38) volgt

$$a_n' = - a_n'' \qquad 42)$$

Schrijven we verder kortheidshalve

$$\varrho\sqrt{k_o^2 - q^2} = \xi_o \;,\; \varrho\sqrt{k_2^2 - q^2} = \xi_2 \;,\; 2a\sqrt{k_o^2 - q^2} = \eta_o \qquad 43)$$

terwijl we gebruik maken van de betrekking

$$H_{-n}^{(2)}(z) = (-1)^n \,.\, H_n^{(2)}(z) \;,$$

dan verkrijgen we

$$a_n' H_n^{(2)} (\varrho \sqrt{k_o^2 - q^2}) +$$

$$+ I_n (\varrho \sqrt{k_o^2 - q^2}) \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} a_m'' H_{n+m}^{(2)} (2a \sqrt{k_o^2 - q^2}) +$$

$$+ a_{-n}' H_{-n}^{(2)} (\varrho \sqrt{k_o^2 - q^2}) +$$

$$+ I_{-n} (\varrho \sqrt{k_o^2 - q^2}) \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} a_m'' H_{n+m}^{(2)} (2a \sqrt{k_o^2 - q^2}) =$$

$$= \{a_n' + (-1)^n a_{-n}'\} H_n^{(2)} (\xi_o) - I_n (\xi_o) \sum_{m=o}^{m=+\infty} \{a_m' + (-1)^m a_{-m}'\} .$$

$$. \{H_{n+m}^{(2)} (\eta_o) + (-1)^m H_{n-m}^{(2)} (\eta_o)\}$$

Eveneens

$$b_n' H_n^{(2)} (\varrho \sqrt{k_o^2 - q^2}) -$$

$$- I_n (\varrho \sqrt{k_o^2 - q^2}) \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} b_m'' H_{n+m}^{(2)} (2a \sqrt{k_o^2 - q^2}) -$$

$$- b_{-n}' H_{-n}^{(2)} (\varrho \sqrt{k_o^2 - q^2}) +$$

$$+ I_{-n} (\varrho \sqrt{k_o^2 - q^2}) \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} b_m'' H_{-n+m}^{(2)} (2a \sqrt{k_o^2 - q^2}) =$$

$$= \{b_n' - (-1)^n b_{-n}'\} H_n^{(2)} (\xi_o) -$$

$$- I_n (\xi_o) \sum_{m=1}^{m=+\infty} \{b_m' - (-1)^m b_{-m}'\} \{H_{n+m}^{(2)} (\eta_o) - (-1)^m H_{n-m} (\eta_o)\} .$$

De verg. g. 32), 33), 34) en 35) worden dan

$$\xi_o^2 \Big[H_n^{(2)} (\xi_o) \{a_n' + (-1)^n a_{-n}'\} -$$

$$- I_n (\xi_o) \sum_{m=1}^{m=+\infty} \{b_m' - (-1)^m b_{-m}'\} \{H_{n+m}^{(2)} (\eta_o) - (-1)^m H_{n-m}^{(2)} (\eta_o)\} =$$

$$= \xi_2^2 . A_n . I_n (\xi_2) \qquad 32a)$$

$$k_o^2 . \xi_o \Big[H_n^{(2)} (\xi_o) \{b_n' - (-1)^n b_{-n}'\} - I_n (\xi_o) \sum_{m=1}^{m=+\infty} \{b_m' -$$

$$- (-1)^m b_{-m}'\} \{H_{n+m}^{(2)} (\eta_o) - (-1)^m H_{n-m}^{(2)} (\eta_o)\} =$$

$$= k_2^2 \xi_2 . B_n . I_n (\xi_2) \qquad 33a)$$

$$-\frac{iqn}{\varrho}\Big[H_n^{(2)}(\xi_o)\{a_n' + (-1)^n a_{-n}'\} - I_n(\xi_o)\sum_{m=o}^{m=+\infty}\{a_m' +$$

$$+ (-1)^m a_{-m}'\}\{H_{n+m}^{(2)}(\eta_o) + (-1)^m H_{n-m}^{(2)}(\eta_o)\}\Big] +$$

$$+ k_o^2\Big[H_n^{(2)'}(\xi_o)\{b_n' - (-1)^n b_{-n}'\} - I_n'(\xi_o)\sum_{m=1}^{m=+\infty}\{b_m' -$$

$$-(-1)^m b_{-m}'\}\{H_{n+m}^{(2)}(\eta_o) - (-1)^m H_{n-m}^{(2)}(\eta_o)\}\Big] =$$

$$= -\frac{iqn}{\varrho} A_n I_n(\xi_2) + k_2^2 B_n I_n'(\xi_2) \qquad 34a)$$

$$-ik_o^2\frac{\xi_o}{\varrho}\Big[H_n^{(2)'}(\xi_o)\{a_n' + (-1)^n a_{-n}'\} - I_n'(\xi_o)\sum_{m=o}^{m=+\infty}\{a_m' +$$

$$+ (-1)^m a_{-m}'\}\{H_{n+m}^{(2)}(\eta_o) + (-1)^m H_{n-m}^{(2)}(\eta_o)\}\Big] +$$

$$+\frac{k_o^2 qn}{\xi_o}\Big[H_n^{(2)}(\xi_o)\{b_n' - (-1)^n b_{-n}'\} - I_n(\xi_o)\sum_{m=1}^{m=+\infty}\{b_m' -$$

$$-(-1)^m b_{-m}'\}\{H_{n+m}^{(2)}(\eta_o) - (-1)^m H_{n-m}^{(2)}(\eta_o)\}\Big] =$$

$$= -ik_2^2\frac{\xi_2}{\varrho}\,.\,A_n I_n'(\xi_2) + \frac{k_2^2 qn}{\xi_2}\,.\,B_n I_n(\xi_2) \qquad 35a)$$

Voeren we voorts in

$$a_n' + (-1)^n a_{-n}' = \alpha_n \quad , \quad b_n' - (-1)^n b_{-n}' = \beta_n \qquad 44),$$

en substitueeren we A_n en B_n uit 32a) en 33a) in 34a) en 35a), dan verkrijgen we de verg. g.

$$-\frac{iqn}{\varrho}\Big[H_n^{(2)}(\xi_o)\,.\,\alpha_n - I_n(\xi_o)\sum_{m=o}^{m=+\infty}\alpha_m\{H_{n+m}^{(2)}(\eta_o) +$$

$$+ (-1)^m H_{n-m}^{(2)}(\eta_o)\}\Big] +$$

$$+ k_o^2\,[H_n^{(2)'}(\xi_o)\,.\,\beta_n - I_n'(\xi_o)\sum_{m=1}^{m=+\infty}\beta_m\{H_{n+m}^{(2)}(\eta_o) -$$

$$-(-1)^m H_{n-m}^{(2)}(\eta_o)\}\,] =$$

$$= -\frac{iqn}{\varrho}\frac{\xi_o^2}{\xi_2}\left[H_n^{(2)}(\xi_o)\,a_n - I_n(\xi_o)\sum_{m=o}^{m=+\infty} a_m\{H_{n+m}^{(2)}(\eta_o) + \right.$$

$$\left. + (-1)^m H_{n-m}^{(2)}(\eta_o)\}\right] + \qquad 45)$$

$$+\frac{k_o^2\xi_o}{\xi_2}\frac{I_n'(\xi_2)}{I_n(\xi_2)}\left[H_n^{(2)}(\xi_o)\,.\,\beta_n - I_n(\xi_o)\sum_{m=1}^{m=+\infty}\beta_m\{H_{n+m}^{(2)}(\eta_o) - \right.$$

$$\left. -(-1)^m H_{n-m}^{(2)}(\eta_o)\}\right]$$

$$-\frac{ik_o^2\xi_o}{\varrho}\left[H_n^{(2)\prime}(\xi_o)\,.\,a_n - I_n'(\xi_o)\sum_{m=o}^{m=+\infty} a_m\{H_{n+m}^{(2)}(\eta_o) + \right.$$

$$\left. + (-1)^m H_{n-m}^{(2)}(\eta_o)\}\right] +$$

$$+\frac{k_o^2 qn}{\xi_o}\left[H_n^{(2)}(\xi_o)\,.\,\beta_n - I_n(\xi_o)\sum_{m=1}^{m=+\infty}\beta_m\{H_{n+m}^{(2)}(\eta_o) - \right.$$

$$\left. -(-1)^m H_{n-m}^{(2)}(\eta_o)\}\right] = \qquad 46)$$

$$= -i\frac{k_2^2}{\varrho}\frac{\xi_o^2}{\xi_2}\frac{I_n'(\xi_2)}{I_n(\xi_2)}\left[H_n^{(2)}(\xi_o)\,.\,a_n - I_n(\xi_o)\sum_{m=o}^{w=+\infty} a_m\{H_{n+m}^{(2)}(\eta_o) + \right.$$

$$\left. + (-1)^m H_{n-m}^{(2)}(\eta_o)\}\right] +$$

$$+ qnk_o^2\frac{\xi_o}{\xi_2^2}\left[H_n^{(2)}(\xi_o)\,.\,\beta_n - I_n(\xi_o)\sum_{m=1}^{m=+\infty}\beta_m\{H_{n+m}^{(2)}(\eta_o) - \right.$$

$$\left. -(-1)^m H_{n-m}^{(2)}(\eta_o)\}\right]$$

Bij de gemaakte onderstellingen zijn de twee termen in het rechterlid van 45) klein t.o.v. de overeenkomstige termen in het linkerlid, bij benadering zullen we ze daarom verwaarloozen. Hetzelfde is het geval met den tweeden term in het rechterlid van 46). Waar nu verder de tweede term in het linkerlid van 46) de zeer kleine grootheid ξ_o in den noemer bevat, terwijl de andere twee overblijvende termen van 46) van dezelfde orde

van grootte en eindig zijn, zoo zal hieruit volgen, dat ook de teller van den tweeden term in het linkerlid van 46) zeer klein moet zijn. Bij benadering zullen we dien teller daarom nul stellen, waaruit volgt, aangezien zulks geldt voor alle waarden n,

$$\beta_n = 0 \tag{47}$$

Uit 47) volgt, dat ook de tweede term in het linkerlid van 45) nul zal zijn, zoodat de grootheden a_n volgen uit de vergelijkingen, die verkregen worden door den eersten term van 45) nul te stellen

$$H_n^{(2)}(\xi_0) \cdot a_n - I_n(\xi_0) \sum_{m=0}^{m=+\infty} a_m \left\{ H_{n+m}^{(2)}(\eta_0) + (-1)^m H_{n-m}^{(2)}(\eta_0) \right\} = 0 \tag{48}$$

in welke vergelijkingen de grootheden ξ_0 en η_0 op grond van de gemaakte onderstellingen zeer klein zullen zijn. Aangezien 48) geldt voor $n \geqq 1$, verkrijgen we het volgende stel vergelijkingen

$$H_1^{(2)}(\xi_0) \cdot a_1 - I_1(\xi_0) \left[2a_0 H_1^{(2)}(\eta_0) + a_1 \left\{ H_2^{(2)}(\eta_0) - H_0^{(2)}(\eta_0) \right\} + a_2 \left\{ H_3^{(2)}(\eta_0) + H_{-1}^{(2)}(\eta_0) \right\} + \ldots \right] = 0$$

$$H_2^{(2)}(\xi_0) \cdot a_2 - I_2(\xi_0) \left[2a_0 H_2^{(2)}(\eta_0) + a_1 \left\{ H_3^{(2)}(\eta_0) - H_1^{(2)}(\eta_0) \right\} + a_2 \left\{ H_4^{(2)}(\eta_0) + H_0^{(2)}(\eta_0) \right\} + \ldots \right] = 0 \tag{48a}$$

. . . .

$$H_n^{(2)}(\xi_0) \cdot a_n - I_n(\xi_0) \left[2a_0 H_n^{(2)}(\eta_0) + a_1 \left\{ H_{n+1}^{(2)}(\eta_0) - H_{n-1}^{(2)}(\eta_0) \right\} + \ldots \right] = 0$$

Aangetoond kan worden, dat de grootheden a_n uit de verg. g. 48a) in functie van a_0, ξ_0 en η_0 kunnen worden bepaald, ook bij willekeurig kleine waarden van ξ_0 en η_0. Zeer eenvoudig wordt deze bepaling, indien $\frac{\xi_0}{\eta_0} = \frac{\varrho}{2a}$ eene kleine grootheid is. Alsdan wordt, indien slechts het quadraat van $\frac{\xi_0}{\eta_0}$ wordt meegenomen, gevonden bij eene zóó kleine waarde van ξ_0 en η_0, dat de benaderingen voor de cylinderfuncties voor een zeer klein argument mogen worden gebezigd,

$$a_1 = a_0 \frac{\xi_0^2}{\eta_0^2}\left(1 + \frac{\xi_0^2}{\eta_0^2}\right) \quad , \quad a_2 = -\frac{a_0}{4} \frac{\xi_0^4}{\eta_0^2} \quad , \tag{49}$$

terwijl a_3 enz. dan verwaarloosd kunnen worden.

De verg. g. 30) en 31) worden nu met inachtneming van 42) en 44)

$$\xi_0^2 \left[\frac{a_0}{2} H_0^{(2)}(\xi_0) - I_0(\xi_0) \left\{ \frac{a_0}{2} H_0^{(2)}(\eta_0) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{m=1}^{m=+\infty} a_m H_m^{(2)}(\eta_0) \right\} \right] = \xi_2^2 . A_0 . I_0(\xi_0) \tag{30a}$$

$$k_0^2 \xi_0 \left[\frac{a_0}{2} H_0^{(2)'}(\xi_0) - I_0'(\xi_0) \left\{ \frac{a_0}{2} H_0^{(2)}(\eta_0) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{m=1}^{m=+\infty} a_m H_m^{(2)}(\eta_0) \right\} \right] = k_2^2 . \xi_2 . A_0 . I_0'(\xi_2) \tag{31a}$$

De grootheden a_m zijn evenredig met a_0 in kunnen uit 49) worden gesubstitueerd. Na deeling door A_0 blijven dan alleen $\frac{a_0}{A_0}$ en q als onbekenden over, die dus uit 30a) en 31a) kunnen worden bepaald. Tenslotte is A_0 de noodzakelijke multiplicatieve constante (zie boven blz. 168).

De hierboven toegepaste benaderingen in verband met het geleidingsvermogen der geleiders zijn feitelijk alleen streng geldig, indien het geleidingsvermogen van de media 1 en 2 oneindig groot is. Het is echter duidelijk, dat de gevolgde methode van benadering voor een betrekkelijk groot geleidingsvermogen van de media 1 en 2 verder kan worden voortgezet, waardoor verdere termen van eene reeksontwikkeling worden verkregen.

Opgemerkt kan worden, dat het hier besproken veld voor het geval van een oneindig groot geleidingsvermogen van het medium 1 beantwoordt aan dat van twee parallele cylindrische geleiders, dat door Mie [1]) behandeld is. Immers bij een oneindig groot geleidingsvermogen van het medium 1 kan het veld aan het grensvlak tusschen de media 0 en 1 worden gespiegeld, waardoor het geval van twee parallele cylindrische geleiders verkregen wordt.

---

[1]) Ann. d. Physik 2 p. 201, 1900.

ONDERZOEK NAAR HET GEDRAG VAN RADIODISTRIBUTIEKABELS

door

Ir. A. VAN GANSWIJK

Voordracht gehouden voor het Nederlandsch Radio Genootschap op 14 Februari 1941.

De titel onderstelt het bestaan van een onderscheid tusschen kabels en kabelnetten voor radiodistributie en kabels voor andere doeleinden. Dit onderscheid is gerechtvaardigd, immers de eischen aan radiodistributiekabels gesteld liggen geheel anders dan die betreffende andere muziekgeleidingen, en anders dan bij electriciteits- en telefoonnetten. Eenerzijds dient n.l. een zekere energie overgebracht te worden, zonder dat volgens de bestaande voorschriften een grooter spanningsverlies dan 30% in de ongunstigste situatie ontstaat; anderzijds is deze energie verdeeld over een breed frequentiespectrum. Die energie moet bovendien geleid worden over een verdeelnet met wisselende belasting, aangezien het aantal der aangesloten luidsprekers voortdurend varieert.

Wat betreft de verdeeling der energie over het frequentiespectrum, deze is zooals bekend zeer ongelijk. Een goed inzicht geeft op dit punt een artikel van Sivian, Dunn & White in „The Journal of the Acoustical Society of America" van Januari 1931: „Absolute Amplitudes and Spectra of Certain Musical Instruments and Orchestras". Daaruit blijkt, dat voor orkestmuziek de gemiddelde geluidsdruk bij de frequentie *10000 Hz* ongeveer *40 db* lager ligt dan die bij de frequenties lager dan *500 Hz*, terwijl bij de meeste instrumenten, zoowel als bij orkesten, de hoogste maxima der geproduceerde acoustische energie in de frequentieband *250—500 Hz* vallen.

Aangaande de hoeveelheid energie, die per luidspreker dient te worden overgebracht, kan het volgende worden opgemerkt.

Gaan we uit van een gewenschte dynamiek van ca. *30 db* en van het feit, dat een toegevoerd electrisch vermogen van ca. *0,4 mW* nog hoorbaar door een luidspreker wordt weergegeven (de laatste waarde is betrekkelijk willekeurig gekozen, in verband met de vele factoren, waardoor zij wordt beïnvloed) dan moet maximaal den luidspreker ongeveer *300 mW* ter beschikking staan. Ook kan als volgt worden geredeneerd. Bij een gemiddeld modulatiepercentage van een omroepzender van 30 % d.w.z. bij ca. 10 % van de maximaal door den luidspreker te verwerken energie moet een behoorlijke huiskamersterkte van het geluid te verkrijgen zijn. Globaal wordt deze aanwezig geacht in een normaal woonvertrek wanneer de geluidsbron een acoustisch vermogen van *200* à *300 μW* heeft. Een gemiddeld luidsprekerrendement van 1 % aannemende, beteekent dit, dat de maximaal door den luidspreker te verwerken electrische energie *200* à *300 mW* dient te bedragen. Deze uitkomst klopt met de voorgaande schatting. Hierbij is het interessant te memoreeren, dat in de eerste ontwikkelingsperiode der radiocentrales gerekend werd met *50 mW* of minder, terwijl later waarden van *500 mW* en *1 W* werden voorgesteld. De practijk heeft echter uitgewezen, dat *300 mW* een veelszins voldoende waarde is.

Hoewel bovenstaande energiebeschouwingen niet van direct belang zijn voor de beoordeeling van het gedrag van radiodistributiekabels werden zij toch gegeven, aangezien de energieverhoudingen mede het totale beeld bepalen.

Van meer direct belang dan de quantiteitseisch is de qualiteitseisch, die aan den over te brengen frequentieband gesteld dient te worden. Houdt men in het oog, dat een kabelnet vanwege de betrekkelijk hooge kapitaalsinvestatie zeker een tiental jaren tot tevredenheid moet kunnen functioneeren, ook gezien in verband met de voortschrijdende technische ontwikkeling dan is het duidelijk, dat de eischen aan het kabelnet eerder aan den hoogen dan aan den lagen kant moeten liggen. Een frequentiekarakteristiek van de spanningsoverdracht die in het bereik van *50* tot *10.000 Hz* voor den ongunstigsten abonné niet meer dan enkele *db*'s van het gemiddelde afwijkt, zal in het volgende als gewenscht aangenomen worden. Vergelijk hiervoor: Ballantine Proc. Institute of Radio Eng. 1934, p. 567.

Zooals uit het bovenstaande reeds hier en daar naar voren kwam zullen de hiernavolgende beschouwingen betrekking hebben op het systeem van radiodistributie, waarbij in een cen-

traal versterkerstation versterkers van zoodanig vermogen staan opgesteld dat voldoende energie via het net aan alle aangesloten luidsprekers geleverd wordt. Systemen met versterkers bij de abonné's blijven dus buiten beschouwing.

Meer in het bijzonder zal die configuratie van het net beschouwd worden, welke bestaat uit voedingkabels en verdeelkabels. De voedingkabels loopen, zonder te worden afgetakt, stervormig vanuit het centrale versterkerstation naar de verschillende voedingpunten. De verdeelkabels van een bepaalde stadswijk vinden hun oorsprong in het betreffende voedingpunt en vormen een verdeelnet, dat de meest grillige vormen kan aannemen. Op de verdeelkabels worden via aftakkabeltjes de luidsprekers aangesloten. De luidsprekers kunnen door de abonné's naar believen uit- en ingeschakeld worden. In een voedingpunt kan tusschen voedingkabel en verdeelnet een transformator geschakeld staan. Het doorgeven van meerdere programma's tegelijkertijd geschiedt door elken kabel op te bouwen uit een aantal dubbeladers gelijk aan het aantal programma's.

Na het vorenstaande is het noodig het doel van ons onderzoek nader te omschrijven. We moeten leeren kennen waardoor en hoe bepaald worden:

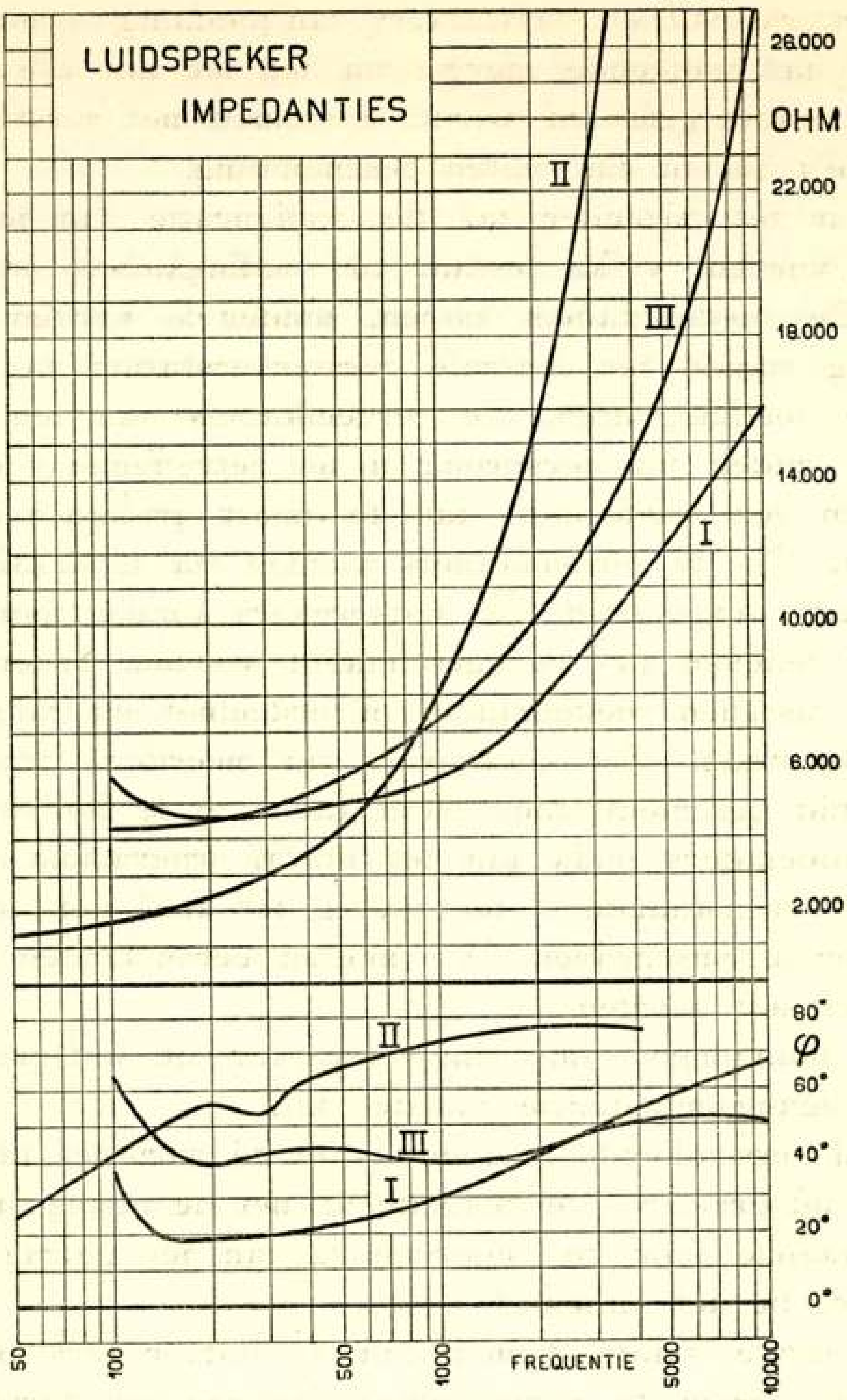
1°. het spanningsverloop van versterker tot luidspreker,

2°. de ingangsimpedantie van het net,

en wel bij verschillende frequenties en bij variabel aantal aangesloten luidsprekers. De bekendheid met de ingangsimpedantie is noodzakelijk voor de beoordeeling van het gedrag van den versterker, die het kabelnet voedt.

In de eerste plaats dienen dan de luidsprekers onderzocht te worden. Gezien de parallelschakeling van een variabel aantal zijn aangewezen die typen, welke bij constante toegevoerde spanning over het geheele frequentiebereik een zooveel mogelijk constante acoustische energie leveren. De electrische impedantie is zeer afhankelijk van de frequentie, doch eveneens van de klemspanning, wat buiten beschouwing gelaten zal worden, en kan voor verschillende typen zeer uiteenloopen, zooals fig. 1 laat zien. Aangezien de verhouding tusschen den weerstand van het kabelnet en de impedantie der parallelgeschakelde luidsprekers ruwweg het spanningsverlies in het net bepaalt, zal de impedantie van elk der aangesloten luidsprekers in het beschouwde frequentiegebied niet beneden een zekere waarde mogen liggen. Dit kan zonder meer verkregen worden door een juiste keuze van de transformatieverhouding van den luidsprekertrans-

FIG. 1



formator. Daar echter een gelijkmatige impedantie gewenscht is komen slechts electrodynamische luidsprekers in aanmerking (krommen I en III). Teneinde goede verhoudingen te kunnen verkrijgen mogen de verschillende toegepaste typen bovendien slechts weinig van elkaar afwijken. Alleen in dat geval is een goede berekening trouwens mogelijk. Het is dan ook een eisch van juiste bedrijfsvoering, dat een strenge contrôle op de door de abonné's gebruikte luidsprekers wordt uitgeoefend. Hiervan uitgaande mag in het onderstaande zonder bezwaar aangenomen worden dat van alle luidsprekers de impedantie-karakteristieken gelijk zijn.

In de tweede plaats beschouwen we nu het verdeelnet in zijn gecompliceerde samenstelling van ringen, aftakkingen en uitloo-

pers. Een exacte berekening hiervan is niet wel mogelijk, noch noodzakelijk. We kiezen daarom een op het eerste gezicht zeer grove benadering, die aangewezen wordt door het feit, dat de lengte van den kabel gemeten van het voedingpunt tot het verste punt uit bedrijfstechnische overwegingen veelal niet langer dan *400* à *600 m* zal gekozen worden. Na verwaarloozing van den weerstand en de zelfinductie van alle kabels blijft over de parallelschakeling van de totale kabelcapaciteit met een voort-

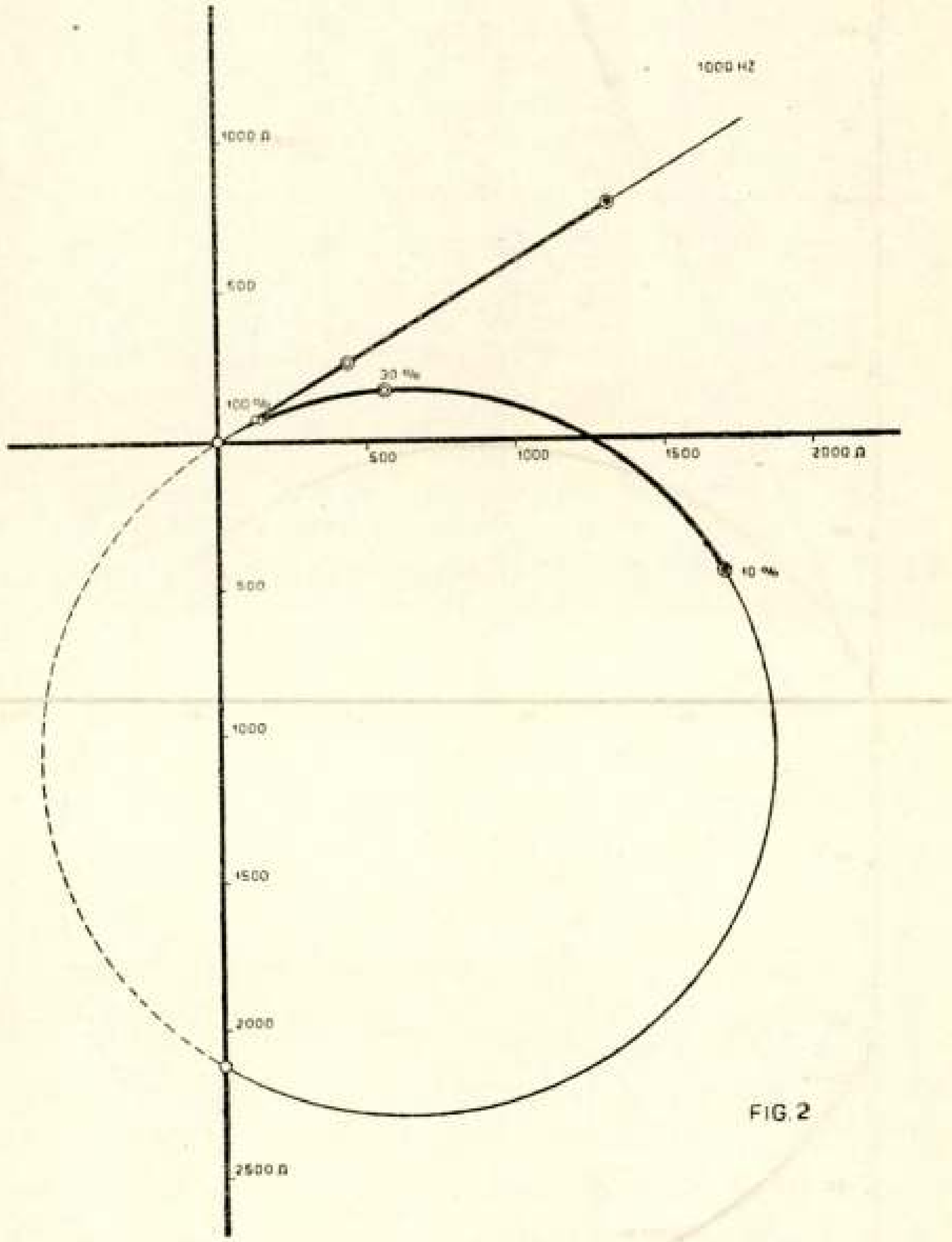


FIG. 2

durend varieerend aantal luidsprekers. Bij een bepaald verdeelnet leiden de gegevens betreffende kabellengte en abonnéaantal benevens kabelcapaciteit en luidsprekerimpedantie tot diagrammen als door fig. 2 en 3 voor twee verschillende frequenties worden voorgesteld. De parallelschakeling bij een zekere frequentie van een constante impedantie (kabelcapaciteit) met een langs een rechte varieerende impedantie (varieerend aantal luidsprekers) levert namelijk als resultante een cirkel (zie hiervoor blz. 185). Combineeren we de gegevens van verschillende frequen-

ties in één diagram dan vinden we fig. 4. Elke kromme geeft hier de ingangsimpedantie van het verdeelnet indien het aangegeven percentage van het aantal aangesloten abonné's den luidspreker heeft ingeschakeld. Beschouwing van deze figuur laat zien:

1⁰ de laagste impedantiewaarden komen voor bij de hoogste belastingen in de laagste frequenties. Middels den eisch van het

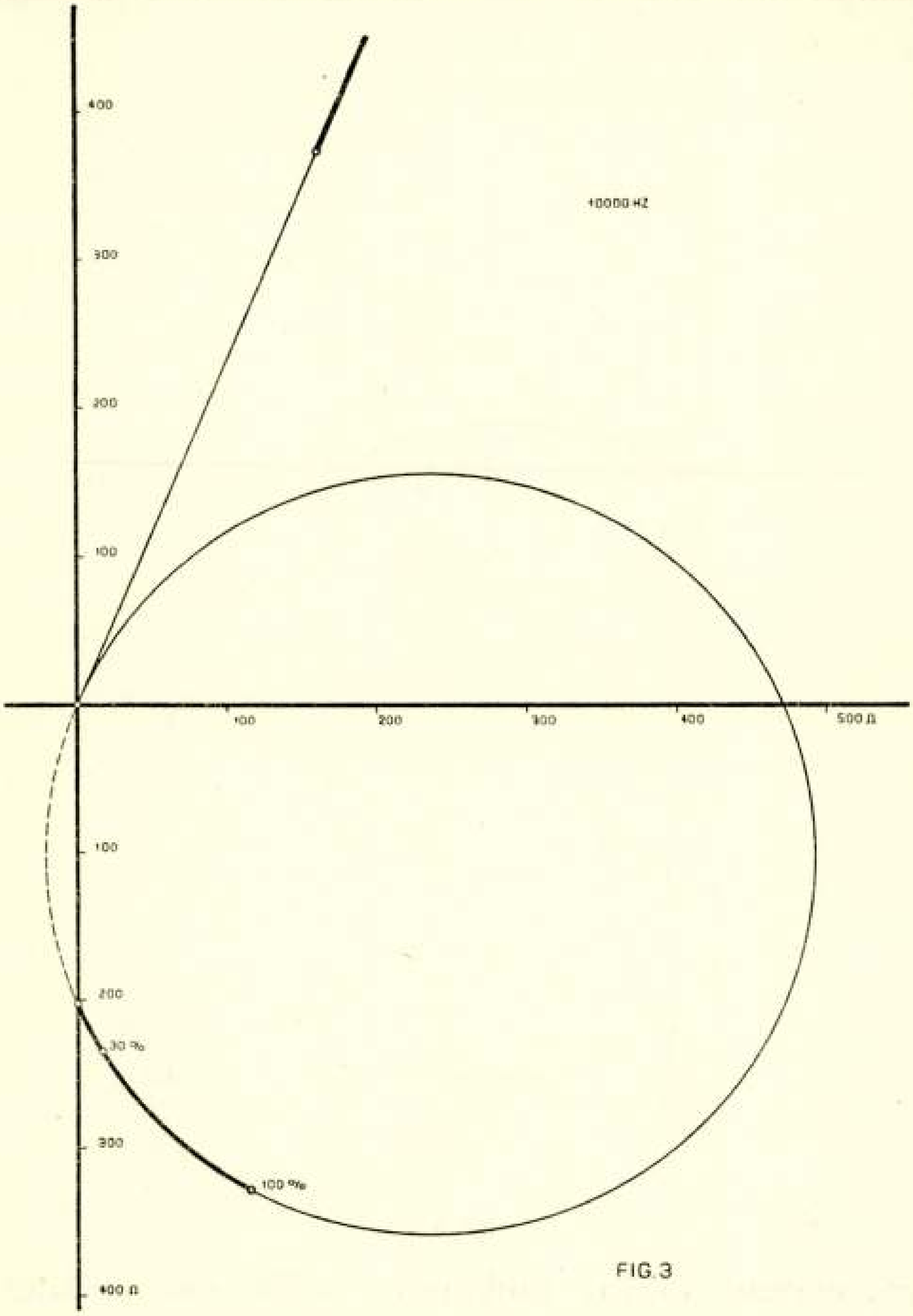


FIG. 3

toelaatbare spanningsverlies bepalen deze waarden de koperdoorsnede der kabels. Aangezien zij weinig phase-verschuiving vertoonen, kan met behulp van de voor gelijkstroomnetten bekende methode de benoodigde aderdiameter van een te ontwerpen net voldoende nauwkeurig geschat worden.

2⁰ uit 1⁰ is duidelijk, dat de ingangsimpedantie bij de lage frequenties in werkelijkheid een percentage hooger zal zijn dan

in het diagram tot uiting komt, welk percentage in de orde van grootte van het toegelaten spanningsverlies ligt en als onder 1^0 geschat kan worden.

3^0 de kabelweerstand zal als gevolg van het onder 1^0 genoemde een zoodanige waarde hebben, dat hij van geen invloed is op de ingangsimpedantie in de hoogere frequenties, doch wel eenigszins in de hoogste der beschouwde frequenties.

4^0 het spanningsverlies in het verdeelnet zal voor de hoogere frequenties onbelangrijk zijn en minder dan $1^0/_0$ bedragen.

5^0 bij de hoogste frequenties zal de ingangsimpedantie meer

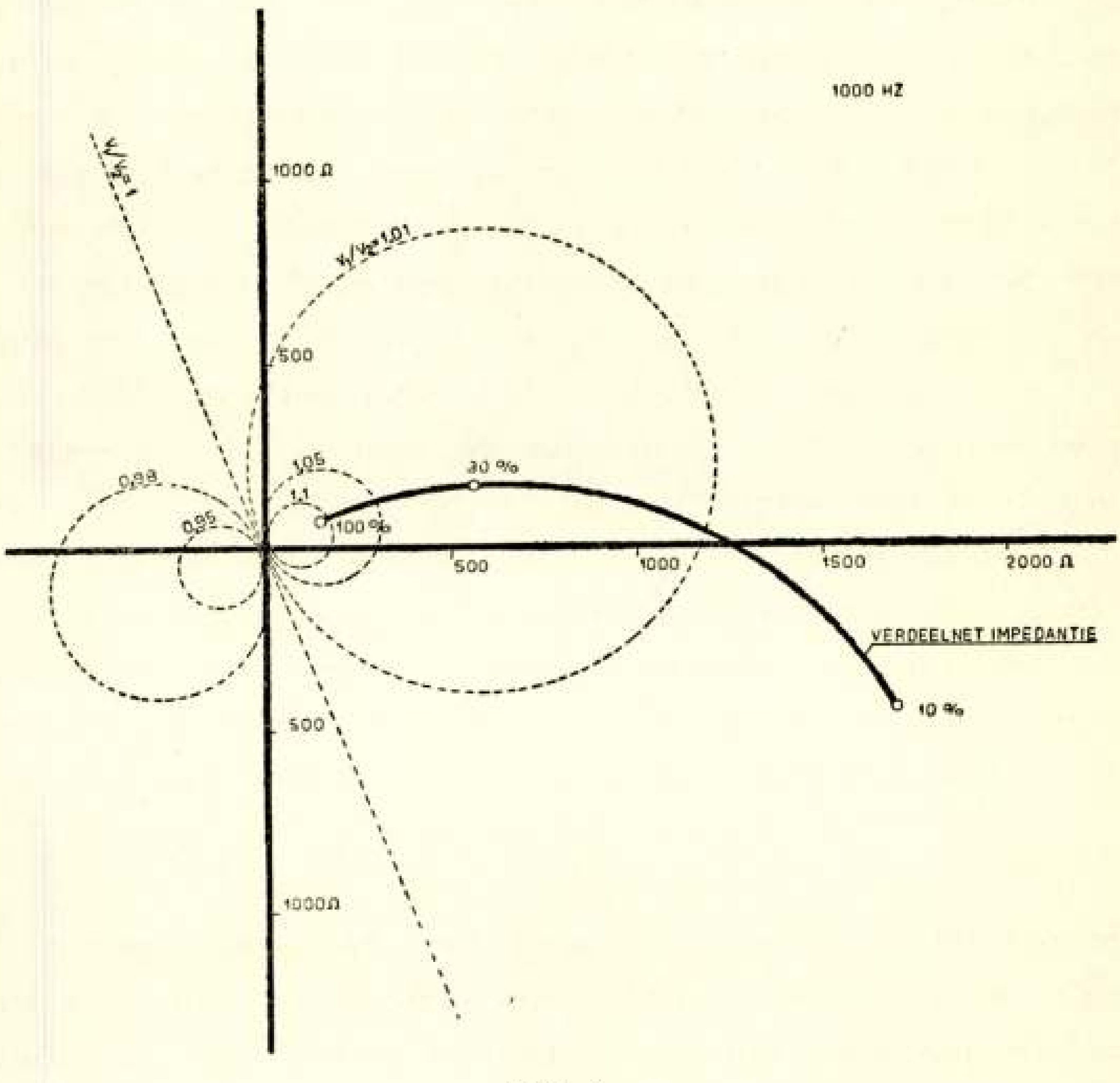


FIG. 4.

van het diagram, en de spanningsverhouding in het verdeelnet meer van de waarde *1* afwijken, naarmate de kabelcapaciteit grooter is.

Het onder 5^0 genoemde kan als volgt nader bekeken worden. Voor een aan het einde open kabel geldt:

$$\overline{V}_1 = \overline{V}_2 \cos h \, \overline{\gamma} \, l \qquad \overline{\gamma} = \sqrt{(R + j\omega L)(A + j\omega C)}$$

$$\overline{Z}_1 = \frac{\overline{\gamma} \, l \cos h \, \overline{\gamma} \, l}{(A + j\omega C) \, l}$$

R, *L*, *A* en *C* zijn de kabelconstanten, *l* is de lengte van den kabel.

Vervangen we de hyperbolische functies door hun reeksontwikkelingen en breken we af na den tweeden term, dan resulteert:

$$\overline{V}_1 = \overline{V}_2 \left(1 + \frac{\overline{\gamma}^2 l^2}{2}\right)$$

$$\overline{Z}_1 = \frac{1}{(A + j\omega C)\, l} \cdot \frac{1 + \dfrac{\overline{\gamma}^2 l^2}{2}}{1 + \dfrac{\overline{\gamma}^2 l^2}{2 \cdot 3}} \simeq \frac{1}{(A + j\omega C)\, l} \cdot \left(1 + \frac{\overline{\gamma}^2 l^2}{3}\right)$$

Hieruit volgt, dat de waarde van $\overline{\gamma}^2 l^2$ de fout bepaalt, die in bovenstaande grafische methode schuilt. Narekenende nemen we eenvoudigheidshalve één onvertakte verdeelkabel met de volgende aan de praktijk ontleende waarden voor de verschillende grootheden: lengte verdeelkabel *400 m*, weerstand van dezen kabel *45 Ohm* per km, aantal (gelijkmatig verdeeld) aangesloten abonné's *20*, lengte abonnékabel *10 m*, capaciteit van den verdeelkabel *0,055 μF/km*, idem van den abonnékabel *0,065 μf/km*, luidsprekerimpedantie *18000 Ohm* bij *10000 Hz*. Allereerst blijkt dat voor *20 m* van bovengenoemde kabelsoorten $(\overline{\gamma}^2 l^2)$ bij *10.000 Hz* van de grootte-orde 10^{-4} is. We mogen dus zonder meer de capaciteit van den abonnékabel en de impedantie van den luidspreker gelijkmatig verdeeld denken langs den verdeelkabel. Vervolgens wordt gevonden voor een verdeelkabel, die verrijkt is met de abonnékabelcapaciteit en een lengte van *400 m* heeft

$$\overline{\gamma}^2 l^2 = -0{,}034 + 0{,}038\, j$$

Dit beteekent bij verwaarloozing van de termen met $\overline{\gamma}^2 l^2$ een fout van ca. 1,5% in de spanningsverhouding, een fout van ca. 1% in den modulus van de ingangsimpedantie en een fout van ca. 1° in de phase van de ingangsimpedantie.

Nemen we echter het geval, dat de verdeelkabel volbelast is, dus alle luidsprekers aangesloten, dan krijgen we

$$\overline{\gamma}^2 l^2 = -0{,}011 + 0{,}026\, j\,.$$

In dit geval zijn de fouten dus nog belangrijk kleiner. Het is echter duidelijk, dat de fouten snel toenemen bij toenemende lengte van den verdeelkabel. Is deze *1000 m* lang en zijn geen luidsprekers aangesloten, dan wordt

$$\overline{\gamma}^2 l^2 = -0{,}21 + 0{,}243\, j$$

hetgeen een fout van 10% in de spanningsverhouding meebrengt

en een fout van 5° in den phasehoek der ingangsimpedantie.

Duidelijk blijkt dus, dat de genoemde fouten bij een verdeelkabellengte van *400* à *600 m* klein blijven t.o.v. de onnauwkeurigheden, die gepaard gaan met de schatting van de totale verdeelkabellengte, in het geval een project wordt gemaakt.

Bij grootere kabellengten kunnen spanningsverhoudingen en ingangsimpedanties berekend worden met behulp van benaderingsformules, afgeleid uit de vierpooltheorie of met behulp van bovengenoemden term $\overline{\gamma}^2 l^2$. Een voortdurend critische instelling t.a.v. de waarde dezer formules is echter geboden teneinde geen foute conclusies te trekken of wel resultaten te krijgen, welke wel anders maar niet beter zijn dan die welke verkregen worden door de simpele parallelschakeling van luidsprekerimpedantie en kabelcapaciteit.

Uitgaande van de ingangsimpedantie van het verdeelnet, zooals die langs grafischen weg gevonden werd, kan nu het gedrag van den voedingkabel worden beschouwd. Die ingangsimpedantie vormt de belasting van dezen kabel, al of niet met tusschenschakeling van een transformator. Voorloopig zal de laatste als ideaal aangenomen worden, zoodat slechts de transformatieverhouding in rekening behoeft te worden gebracht. Evenals in het geval van het verdeelnet ligt met het oog op de vele variabelen het gebruik van een grafische methode voor de hand. In de litteratuur worden meerdere methoden gegeven, zie b.v. Cafferata, „The calculation of input-or sending-end-impedance of faders and cables terminated by complex loads", Marconi Review, Jan.-Febr. p. 12 en Sept.-Dec. 1937 p. 12 en Roberts, „Graphical Solutions for a transmission line terminated by an arbitrary load impedance", in RCA-Review p. 107, 1938. In het onderhavige probleem kan echter met vrucht gebruik gemaakt worden van een artikel van Ir. H. W. G. van Gils in „De Ingenieur" van 24 Jan. 1936. In dit artikel worden de formules afgeleid, die voor een kabel van gegeven lengte en samenstelling en bij een bepaalde frequentie, cirkelbundels bepalen, liggende in het complexe vlak der impedantie ($\overline{Z}_2$), waarmede die kabel is belast. De parameters dezer cirkelbundels zijn resp. de verhouding van de effectieve waarden der spanningen aan begin en eind van den kabel $\frac{V_1}{V_2}$ dezelfde verhouding der stroomen $\frac{I_1}{I_2}$ het Watt-rendement η_w en het Wattlooze rendement η_{wl} der schakeling. In elke formule komen vier coëfficienten voor. Zonder nog andere coëfficienten in te voeren, worden voorts uit de ge-

noemde formules nog formules afgeleid voor cirkelbundels met als parameters resp. de modulus Z_1 en de phase φ der ingangsimpedantie van den kabel. Indien nu voor een gegeven kabel en frequentie de cirkels geteekend worden, kan voor elke belastingsimpedantie de waarde van den gewenschten parameter worden afgelezen. In ons geval interesseeren de formules voor $\frac{V_1}{V_2}$ en voor Z_1, deze zijn:

$$\left\{a_1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)\right\}^2 (x^2 + y^2) + d_1 x + c_1 y + b_1 = 0$$

en

$$x^2 + y^2 + \frac{d_1 - Z_1^2 d_2}{a_1 - Z_1^2 a_2} + \frac{c_1 - Z_1^2 c_2}{a_1 - Z_1^2 a_2} y + \frac{b_1 - Z_1^2 b_2}{a_1 - Z_1^2 a_2} = 0$$

waarin

$$x = Z_2 \sin\varphi \qquad y = Z_2 \cos\varphi$$

$$a_1 = \frac{\cosh 2\beta l + \cos 2\alpha l}{2} \qquad a_2 = \frac{\cosh 2\beta l - \cos 2\alpha l}{2 Z_0^2}$$

$$b_1 = \frac{\cosh 2\beta l - \cos 2\alpha l}{2} Z_0^2 \quad b_2 = \frac{\cosh 2\beta l + \cos 2\alpha l}{2}$$

$$c_1 = Z_0 (\sinh 2\beta l \cos\Theta - \sin 2\alpha l \sin\Theta)$$

$$c_2 = \frac{1}{Z_0} (\sinh 2\beta l \cos\Theta + \sin 2\alpha l \sin\Theta)$$

$$d_1 = Z_0 (\sinh 2\beta l \sin\Theta + \sin 2\alpha l \cos\Theta)$$

$$d_2 = \frac{1}{Z_0} (\sinh 2\beta l \sin\Theta - \sin 2\alpha l \cos\Theta)$$

$\overline{Z}_0 = Z_0\, \varepsilon^{j\Theta}$ de golfimpedantie van den kabel

$\overline{\gamma} = \beta + j\alpha$ de voortplantingsconstante van den kabel

Alvorens deze formules toe te passen is het interessant hen eens nader te beschouwen. Met behulp van de vierpooltheorie en de leer der conforme afbeelding uit de functietheorie is op eenvoudige wijze af te leiden, dat de vergelijkingen $\frac{V_1}{V_2}$ = constant en Z_1 = constant inderdaad leiden tot cirkelvormige meetkundige plaatsen in het complexe Z_2-vlak. Met de bekende vergelijkingen van de passieve vierpool volgt immers:

$$\frac{\overline{V}_1}{\overline{V}_2} = \overline{A}_1 + \frac{\overline{B}}{\overline{Z}_2} \text{ en } \overline{Z}_1 = \overline{Z}_0 + \overline{Z}_0 \frac{\overline{Z}_k - \overline{Z}_0}{\overline{Z}_0 + \overline{Z}_2}$$

Deze formules zijn resp. van de vormen

$$\overline{w} = \overline{A}_1 + \frac{\overline{B}}{\overline{z}} \text{ en } \overline{w} = \overline{a} + \frac{\overline{b}}{\overline{a} + \overline{z}}$$

Van beide betrekkingen weten we, dat ze een cirkelverwandschap uitdrukken. M.a.w. met een cirkel in het $\overline{z}$-vlak correspondeert in het algemeen een cirkel in het $\overline{w}$-vlak en omgekeerd. Aangezien nu de bovenstaande vergelijkingen $\frac{V_1}{V_2}$ = constant en Z_1 = constant niets anders beteekenen dan cirkels met de oorsprong als middelpunt, gelegen resp. in het $\frac{\overline{V}_1}{\overline{V}_2}$-vlak en het $\overline{Z}_1$-vlak, zullen zij correspondeeren met cirkels in het $\overline{Z}_2$-vlak. Hiermede is het bestaan der cirkelverwandschap bewezen voor de algemeene passieve vierpool. Voor een kabel, als zijnde een symmetrische vierpool, geldt hetzelfde en eveneens voor het eenvoudige geval van de parallelschakeling van twee impedanties, waarvan de eene variabel gedacht is. Overeenkomstige beschouwingen als de hierboven gegevene zijn te vinden in het boek van Feldtkeller: „Einführing in die Vierpoltheorie der elektrischen Nachrichtentechnik".

In de vierpoolvergelijkingen komen vier complexe coëfficienten voor. Hiervan zijn er drie onafhankelijk aangezien nog de betrekking $\overline{A}\,\overline{D} - \overline{B}\,\overline{C} = 1$ bestaat. Voor een symmetrische vierpool geldt nog $\overline{A} = \overline{D}$, zoodat hier slechts twee complexe coëfficienten het geheel bepalen ofwel vier onafhankelijke grootheden. Het gedrag van een kabel van lengte l is bepaald door de vier grootheden lR, lA, ωlL en ωlC, hetgeen aequivalent is met de vier onafhankelijke grootheden van de symmetrische vierpool. Van Gils komt echter tot $4 \times 4 = 16$ coëfficienten in zijn vergelijkingen. In verband met het bovenstaande is het duidelijk, dat deze niet onafhankelijk kunnen zijn. Nagaande blijkt, dat er tusschen de coëfficienten met gelijke index steeds een relatie bestaat b.v.

$$c_1^2 + d_1^2 = 4a_1 b_1$$

$$c_2^2 + d_2^2 = 4a_2 b_2$$

Voorts zijn er 8 eenvoudige betrekkingen te vinden tusschen coëfficienten met ongelijke indices b.v.

$$a_1 = b_2$$

$$c_1 = 2b_3$$

Zoodoende blijven 16 — 4 — 8 = 4 onafhankelijke coëfficienten over, hetgeen naar aanleiding van het bovengenoemde te verwachten was.

De berekening der verschillende coëfficienten volgens bovenstaande formules is betrekkelijk bewerkelijk. In de hier interesseerende gevallen blijkt echter een belangrijke vereenvoudiging mogelijk. Deze bestaat in de eerste plaats in de verwaarloozing van de afleiding van den kabel: $A = 0$. Ter schatting van de daardoor gemaakte fout zij gebruik gemaakt van een zeer helder gesteld artikel van Dr. Haak in „Telegraphen-Fernsprech-Funk-und Fernseh-Technik" Bd. 27 Mei 1938 S. 179. Dit artikel behandelt de gevaarlijke materie van het verwaarloozen bij kabelberekeningen en laat zien, dat indien de verlieshoek van den kabel $\delta = 0{,}003$, bij verwaarloozing van A een fout in α, β, het reëele gedeelte van $\overline{Z}_0$ en het imaginaire gedeelte van $\overline{Z}_0$ ontstaat van minder dan 1%, mits $\frac{\omega L}{R} < 3{,}5$. Voor ongedrenkte kabels met papier-lucht-isolatie mag inderdaad aangehouden worden, dat de verlieshoek de waarde $0{,}003$ bij geen enkele frequentie lager dan $10.000\ Hz$ overschrijdt. Voorts is bij de hoogste der beschouwde frequenties en de kleinste der toegepaste aderweerstanden $\frac{\omega L}{R} \simeq 4$, waaruit blijkt dat de verwaarloozing van A in de gegeven gevallen ten volle verantwoord is. Verder wordt op de in de coëfficienten voorkomende hyperbolische en goniometrische functies reeksontwikkeling toegepast. Dan blijken simpele, snel convergeerende reeksen te ontstaan, welker termen eenvoudige functies der kabelconstanten zijn:

$$a_1 = 1 - l^2 XY + \frac{1}{6} l^4 Y^2 (R^2 + 2X^2) + \ldots\ldots.$$

$$b_1 = l^2 (R^2 + X^2) \left\{ 1 - \frac{1}{3} l^2 XY + \frac{1}{90} l^4 Y^2 (R^2 + 4X^2) + \ldots\ldots \right\}$$

$$c_1 = 2lR \left\{ 1 - \frac{1}{3} l^2 XY + \frac{1}{30} l^4 Y^2 (R^2 + 2X^2) + \ldots\ldots \right\}$$

$$d_1 = 2lX\left\{1 - \frac{1}{3}l^2\frac{Y}{X}(R^2 + 2X^2) + \frac{1}{30}l^4 Y^2(3R^2 + 4X^2) + \ldots\right\}$$

waarin

$X = \omega L$ $\quad L$ = zelfinductie van de dubbelader per km.
$Y = \omega C$ $\quad C$ = capaciteit van de dubbelader per km.
$\quad R$ = weerstand van de dubbelader per km.

Volledigheidshalve zij vastgesteld, dat bij een kabellengte van

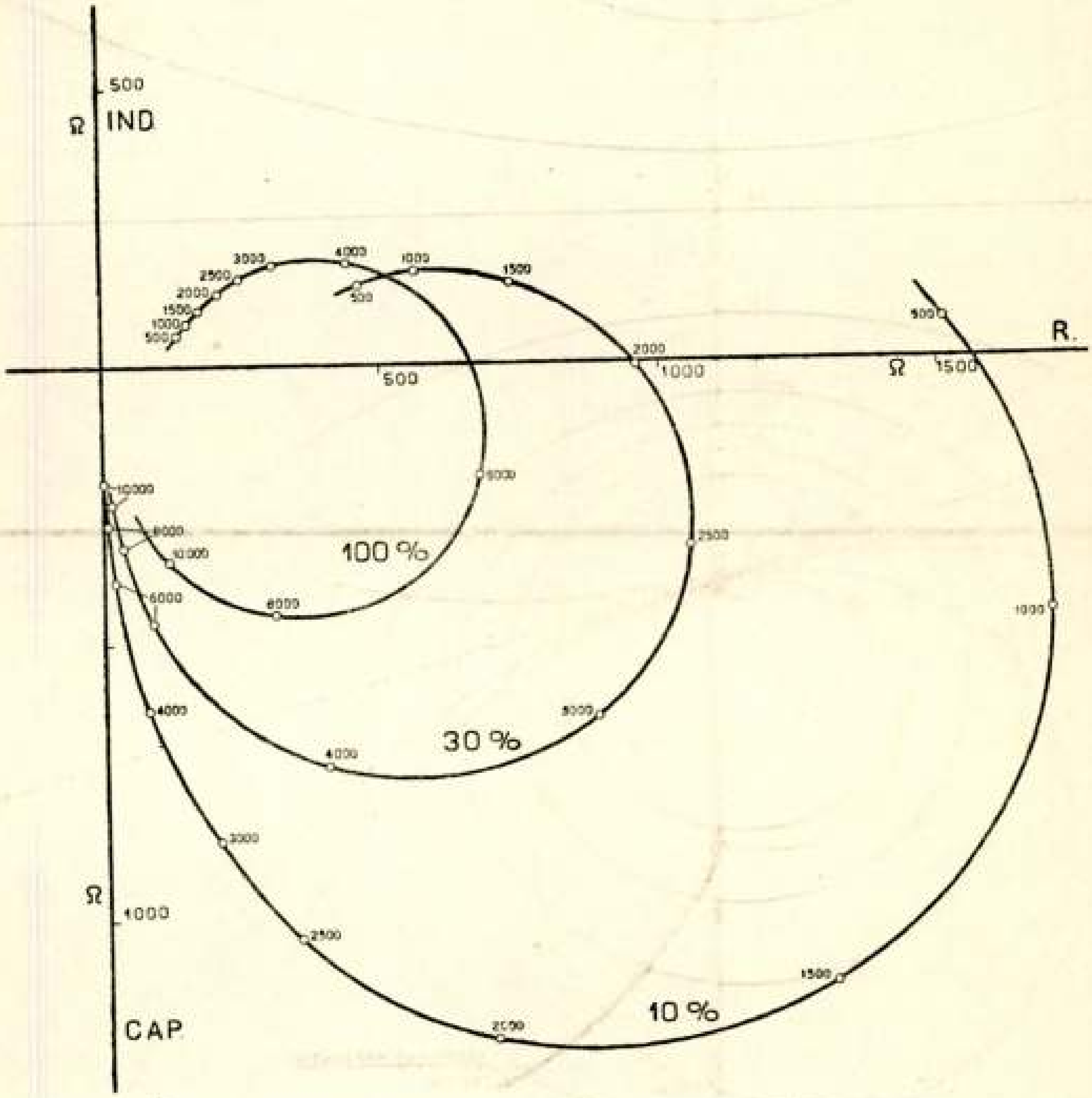


FIG 5

1 km en een frequentie van *1000 Hz* de reeksen reeds na den eersten term kunnen worden afgebroken. Bij dezelfde lengte doch *10,000 Hz* zijn twee termen noodig, evenals bij een lengte van *2,5 km* en *1000 Hz*, terwijl de laatste kabellengte bij *10.000 Hz* drie termen noodig maakt, om de fout niet grooter dan ca. 1% te doen zijn.

Vermeldenswaard is nog, dat in bepaalde gevallen de reeksontwikkeling betrouwbaarder resultaat geeft dan het berekenen der coëfficienten met behulp van de exacte formules en tabellen. Wordt een coëfficient n.l. gegeven door het verschil van twee termen, die vrijwel gelijk zijn en bovendien door interpolatie

moeten worden gevonden, dan kunnen relatief groote onnauwkeurigheden optreden.

Hiermede is een methode uitgewerkt, met behulp waarvan het gedrag van een gegeven voedingkabel met verdeelnet en luidsprekers kan worden bepaald. Als voorbeelden mogen fig. 5 en 6 dienen, die het gedrag van een voedingkabel van 1 km lengte weergeven resp. bij *1000 Hz* en *10.000 Hz*. Tevens werd

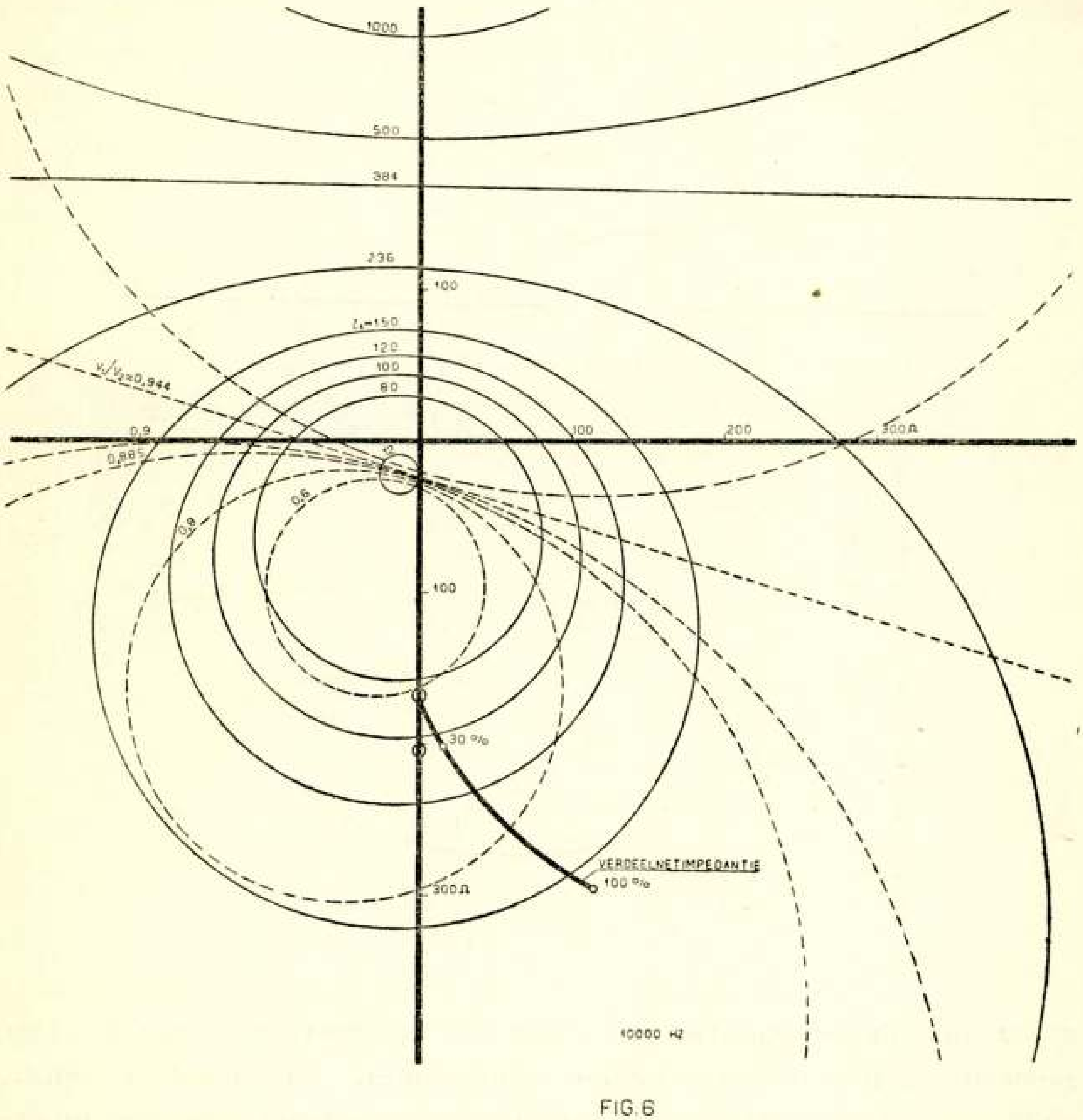


FIG. 6

de impedantiekarakteristiek van het bijbehoorende verdeelnet bij varieerend aantal ingeschakelde luidsprekers, aangegeven. Duidelijk zien we hoe de capaciteit der kabels tot resultaat heeft, dat in de hooge frequenties de impedantie, waarmede de versterker wordt belast, zeer klein kan worden en gemakkelijk een waarde kan krijgen die zoo laag is, dat de frequentiekarakteristiek van dien versterker ongunstig wordt beinvloed. Hier staat echter een compenseerende factor tegenover. De

spanning zal bij de beschouwde frequenties aan het einde van den voedingkabel hooger zijn dan aan het begin. Door een juiste dimensioneering van net en versterker zal een goed totaalresultaat verwacht mogen worden. Als illustratie hiervan diene fig. 7. De daar weergegeven krommen werden opgemeten in de radiocentrale der NOZEMA N.V, te Delft, welke werd gebouwd volgens een project opgezet met behulp van de boven uiteengezette methode van berekening. Kromme I geeft de ingansimpedantie van het totale kabelnet, kromme III de frequentiekarakteristiek van den versterker, die op dat net was aangesloten en kromme II de frequentiekarakteristiek, die tegelijkertijd in een voedingpunt van het verdeelnet werd opge-

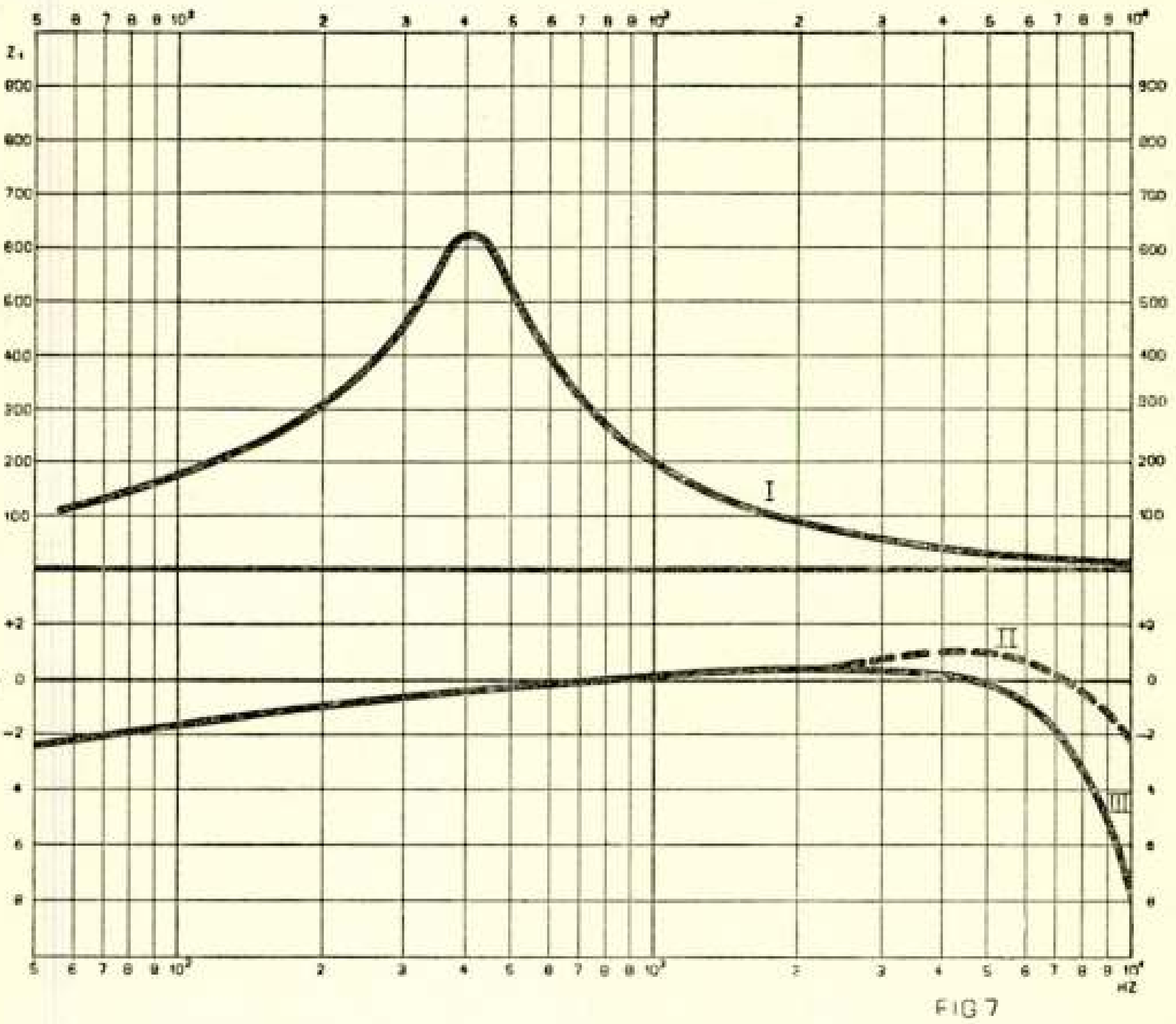


FIG 7

meten. De metingen werden verricht terwijl vrijwel geen luidsprekers waren ingeschakeld. Zooals bij de behandeling van het gedrag van het verdeelnet werd uiteengezet mag kromme II als geldende voor de aangesloten luidsprekers worden aangenomen. Als karakteristiek punt komt naar voren, dat de toestand van het net zooals die werd opgemeten, dus zonder luidsprekers, de ongunstigste is voor den versterker, wat betreft zijn aanpassing. Neemt immers het aantal ingeschakelde luidsprekers toe, dan daalt de netimpedantie voor de lage frequenties, terwijl die impedantie voor de hoogste frequenties eenigszins toe zal nemen, gepaard gaande met een kleinere spanningsverhooging langs den kabel, voor die frequenties. Wordt

het aantal luidsprekers steeds grooter, dan zal op een zeker moment vanwege de gevraagde energie een extra versterker parallel geschakeld dienen te worden. Daardoor verbetert wederom de aanpassing en wordt de frequentiekarakteristiek vlakker.

Uit het bovenstaande volgt nu, dat bij een gegeven kabelnet de onderste grenswaarde voor het vermogen van een toe te passen versterker bepaald wordt door de capaciteit van dat net, indien ook bij onbelast net een behoorlijke frequentiekarakteristiek zal worden gehandhaafd voor de hoogste frequenties. Tevens is duidelijk, dat door het toelaten van luidsprekers, welker impedantie bij dalende frequentie sterk afneemt, de frequentiekarakteristiek van het geheel in de lage frequenties ongunstig wordt beinvloed. Terloops zij opgemerkt, dat het gedrag van den versterker in de onderhavige omstandigheden verbeterd zou worden door het toepassen van negatieve terugkoppeling.

De rol van den transformator tusschen voedingkabel en verdeelnet vraagt nog een nadere beschouwing. Deze transformator dient om de energie langs den voedingkabel met verhoogde spanning over te brengen en zoodoende de Ohmsche verliezen te beperken. Hetzelfde zou eveneens bereikt kunnen worden door de luidsprekerimpedantie te verhoogen, waarbij tevens de Ohmsche verliezen in het verdeelnet zouden worden verminderd. In dit geval zou echter de capaciteit van het verdeelnet rechtstreeks den versterker belasten, terwijl bij toepassing van den transformator de impedantie van die capaciteit met het kwadraat van de transformatieverhouding wordt vermenigvuldigd en dus belangrijk gunstiger gemaakt. De primaire zelfinductie van den transformator vormt een continue belasting van den versterker en dient dus voldoende hoog gekozen te worden. In het geval van fig. *7* is zij aan den lagen kant. Zij geeft voorts parallelresonantie met de capaciteit van den voedingkabel en de getransformeerde capaciteit van het verdeelnet. Deze resonantie komt duidelijk uit in fig. *7*. Bij toename van het aantal ingeschakelde luidsprekers verdwijnt de piek vrij snel. Voorts treedt serieresonantie op van de spreidingsinductie van den transformator met de capaciteit van het verdeelnet. Deze inductie en capaciteit moeten dientengevolge zoo klein gekozen worden, dat de resonantiefrequentie bij *15.000 Hz* of hooger ligt. Tenslotte spelen vanzelfsprekend de Ohmsche verliezen en de ijzerverliezen van dezen transformator hun rol bij diens energieoverdracht.

Het vorenstaande biedt in principe de grondslagen voor het ontwerp van een radiodistributienet voor een bepaalde plaats.

Allereerst is daartoe echter noodig het maken van een schatting betreffende het totaal der te verwachten abonné's en de daarvoor benoodigde kabellengte. In verband met de indeeling der bebouwing kan het verdeelnet altijd wel gesplitst worden in een aantal afzonderlijke ongeveer even groote groepen, ieder met een eigen voedingkabel naar een centraal punt, waar de centrale gedacht wordt. Noemen we nu

Z de impedantie van het luidsprekerspoeltje bij *500* à *1000 Hz*,

n_1 het aantal luidsprekers, dat maximaal door één versterker kan worden gevoed,

a_1 de transformatieverhouding van den luidsprekertransformator,

a_2 de transformatieverhouding van den voedingkabeltransformator,

C_1 de totale capaciteit van het verdeelnet en van de aftakkabels der luidsprekers,

C_2 de totale capaciteit der voedingkabels

dan is bij verwaarloozing van weerstand en zelfinductie van transformator en kabels:

$$Z_1 = \frac{a_1^2 \, a_2^2 \, Z}{n_1}$$

de minimale waarde van de belastingimpedantie van den versterker, en

$$Z_2 = \frac{1}{2\pi \, 10^4 \left(\frac{c_1}{a_2^2} + c_2 \right)}$$

de reactantie van de kabelcapaciteit bij *10000 Hz*, indien deze in één punt geconcentreerd gedacht wordt. Hoe kleiner Z_2 is t.o.v. Z_1 hoe ongunstiger de aanpassing van den versterker. Aangenomen mag worden, dat voor $Z_2 = (0{,}2$ à $0{,}25)\ Z_1$, nog goede resultaten kunnen worden bereikt.

Hiermede is dan een eerste betrekking tusschen de verschillende grootheden gegeven. Een tweede betrekking vinden we door het spanningsverlies van den langsten voedingkabel in formule te brengen. Nemen we aan, dat hierop n_2 luidsprekers zijn aangesloten, dat zijn lengte $l_1\,m$ bedraagt en zijn aderdoorsnede $f\,mm^2$, dan kan geschreven worden

$$\frac{\frac{2l_1}{kf}}{\frac{a_1^2 a_2^2 Z}{n_2} + \frac{2l_1}{kf}} = 0{,}12$$

indien het spanningsverlies op 12% gesteld wordt in verband met den eisch van een totaal van 30% voor den verstverwijderden luidspreker. Hierin zal Z in het algemeen *5 Ohm* bedragen, terwijl voorloopig $n_2 = 200$ à 300 en $f = 3\ mm^2$ aangenomen kunnen worden. Zoodoende is $a_1^2 a_2^2$ te berekenen. Teneinde voorts de capacitieve belasting van den versterker zoo klein mogelijk te houden, verdient het aanbeveling de voedingkabels met papier-lucht--isolatie te nemen, waardoor $C_2 \simeq l_2 \,.\, 0{,}04 \,.\, 10^{-6}$ wordt. De totale lengte der voedingkabels is hierbij als $l_2\ km$ ingevoerd. Kiezen we nu nog n_1 in verband met het totale aantal abonné's en de stroomkosten, dan ligt de waarde van $\frac{c_1}{a_2^2}$ vast en tevens het vermogen van den toe te passen versterker. Het bedrag van *300 mW* per luidspreker, dat in den aanvang van dit artikel werd berekend, aanhoudende, komen we n.l. tot een nuttig vermogen van $0{,}3\, n_1$ Watt. De keuze van C_1 houdt in de keuze van de wijze van isoleering der kabeladers en is dientengevolge tamelijk beperkt. C_1 bepaalt nu a_2 en daarna kan volgens de gelijkstroommethode de aderweerstand van het verdeelnet worden berekend. Blijkt deze ongunstig uit te vallen, dan dient een andere C_1 te worden genomen ofwel de keuze van een of meer der grootheden n_1, en n_2, f te worden gewijzigd. Vanzelfsprekend spelen economische factoren daarbij een belangrijke rol. Is een aannemelijke oplossing gevonden, dan kunnen de koperdoorsneden van alle voedingkabels worden bepaald, de eischen aan welke de transformatoren behooren te voldoen worden vastgesteld en tenslottte het gedrag van het geheele kabelnet in detail worden nagegaan met behulp van de boven uiteengezette methode. Eventueel zullen als gevolg daarvan nog wijzigingen in den opzet noodzakelijk blijven.

Uit het bovenstaande is gebleken, dat in de hooge frequenties de belasting van een voedingkabel met de capaciteit van het verdeelnet een ongunstige uitwerking heeft op de ingangsimpedantie van den voedingkabel. Dit wordt nog verergerd door de spreidingsinductie van den transformator, welke immers in serie staat met de verdeelnetcapaciteit. Uit de cirkeldiagrammen is

aanstonds te zien, dat een niet onaanzienlijke verbetering zou ontstaan als de phasehoek der verdeelnetimpedantie bij de hooge frequenties belangrijk kleiner gemaakt werd. De vraag komt op of dit niet bereikt kan worden door een impedantie aan het einde van den voedingkabel parallel aan het verdeelnet te schakelen. De luidsprekers hebben reeds invloed in deze richting. Bij de beantwoording der vraag zijn het de cirkeldiagrammen, die den weg wijzen naar een overzichtelijke oplossing. Daarbij wordt als volgt te werk gegaan. Als uitgangspunt dient de toestand, waarbij geen luidsprekers op het net zijn aangesloten.

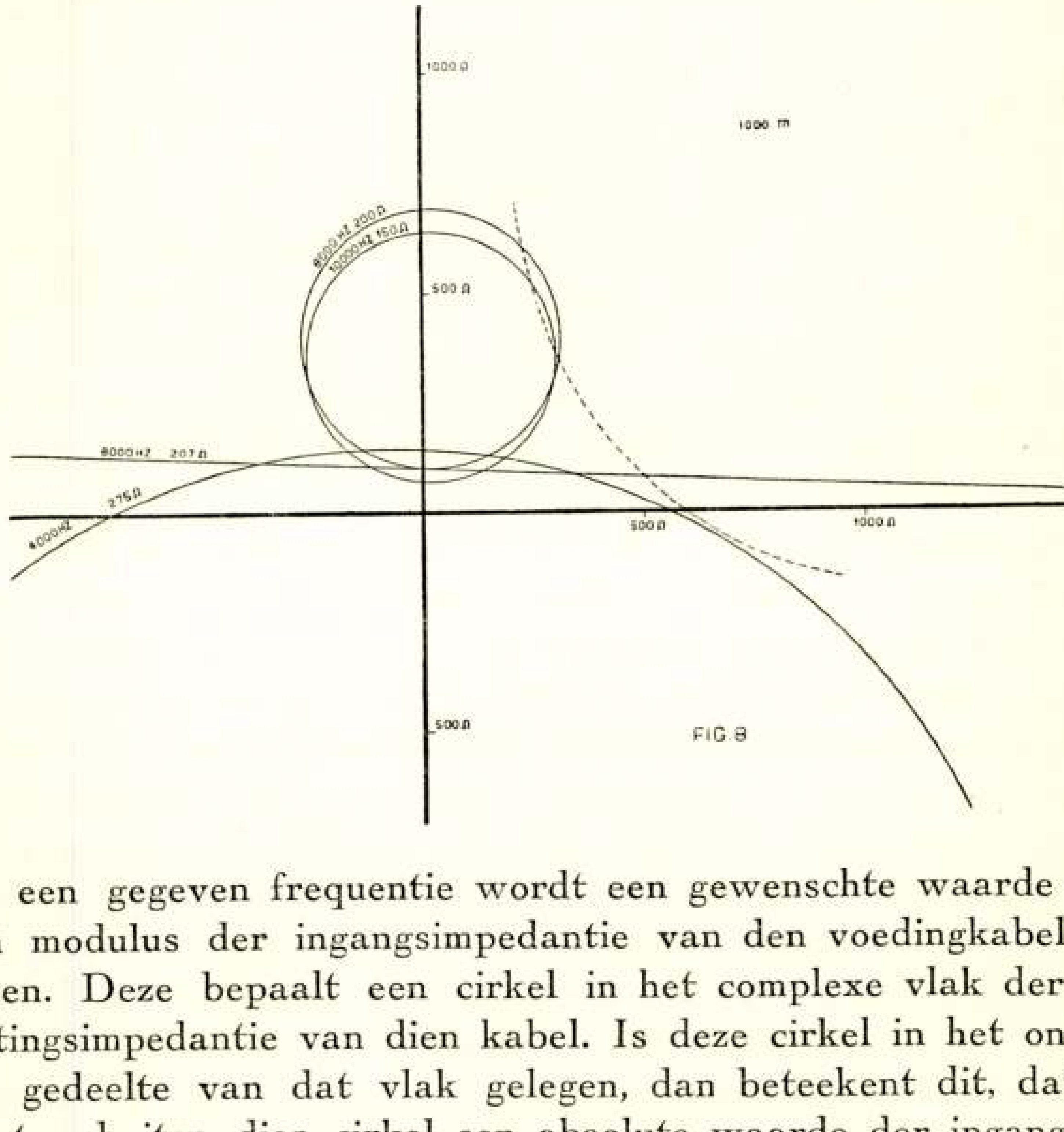


FIG. 8

Bij een gegeven frequentie wordt een gewenschte waarde van den modulus der ingangsimpedantie van den voedingkabel gekozen. Deze bepaalt een cirkel in het complexe vlak der belastingsimpedantie van dien kabel. Is deze cirkel in het onderste gedeelte van dat vlak gelegen, dan beteekent dit, dat de punten buiten dien cirkel een absolute waarde der ingangsimpedantie geven grooter dan de gewenschte en de punten er binnen een kleinere. We moeten nu de meetkundige plaats zoeken van de punten, voorstellende de impedanties, die parallel geschakeld met de reactantie van het verdeelnet (medegerekend de spreiding van den transformator) de punten van bovengenoemden cirkel opleveren. Uit de beschouwing op blz. 185 volgt, dat de gezochte meetkundige plaats eveneens een cirkel is. Door overgang op de admittanties (inversie van den cirkel) en af-

trekking, wordt de gewenschte admittantiecirkel gevonden en daaruit de impedantiecirkel. De punten binnen dezen cirkel gelegen geven ingangsimpedanties van grooter absolute waarde dan de als gewenscht aangenomene en de punten er buiten kleinere waarden. De eerstgenoemde punten voldoen dus, afgezien van de door hen bepaalde spanningsverhouding $\frac{V_1}{V_2}$.

Deze bewerking, uitgevoerd voor enkele frequenties vanaf *4000* tot *10.000 Hz*, levert voor een gegeven geval enkele cirkels, zooals in fig. 8 werd weergegeven voor een voedingkabel (lengte *1000 m*), welke belast is met het verdeelnet van fig. 4. Het probleem is daarmede teruggebracht tot de opgave om een schakeling te vinden, welker frequentieverloop zoodanig is, dat de impedantie bij een bepaalde frequentie voorgesteld wordt door een punt binnen den bijbehoorenden cirkel. Dit laatste geldt evenwel niet voor *4000 Hz*, bij welke frequentie in dit geval een punt buiten de cirkel gewenscht wordt. Bovendien moet de impedantie van de schakeling in de lagere frequenties zoodanig zijn, dat geen ongewenschte belasting van den versterker optreedt! In de eerste plaats dient dus een analytische functie van de frequentie gezocht te worden, die aan bovengenoemde voorwaarden voldoet en physisch realiseerbaar is; in de tweede plaats moet de schakeling worden bepaald, welker impedantie door deze functie wordt voorgesteld. De bepaling van een schakeling, welker impedantie analytisch als functie der frequentie is gegeven, vormt een probleem, dat het eerst werd aangesneden door Foster in „A Reactance Theorem", „Bell System Technical Journal" Vol III, no. 2 April 1924, hierbij steunend op werk van Campbell en Zobel. Cauer geeft in „Die Verwirklichung von Wechselstromwiderständen vorgeschriebener Frequenzabhängigkeit", Archiv für Elektrotechnik, 1926—'27, Band 17, S 355 de oplossing voor schakelingen, die slechts uit twee soorten elementen bestaan. Hij maakt daarbij gebruik van ontwikkeling in partiaalbreuken en van ontwikkeling in kettingbreuken volgens Stieltjes. Brune geeft echter gebruik makende van z.g. positief reëele functies een algemeene oplossing in een interessant artikel „Synthesis of a Finite Two-Terminal Network Whose Driving-point Impedance is a Prescribed Function of Frequency", Journal of Mathematics and Physics M. I. T. Vol. X. 1930—'31, p. 191. Tevens worden daarbij afgeleid de voorwaarden aan welke de functie dient te voldoen om physisch realiseerbaar te zijn. Stellen we de functie voor als:

$\overline{Z}(\lambda) = \dfrac{f(\lambda)}{g(\lambda)}$ waarin $\lambda = a + j\omega$, dan luiden deze voorwaarden

1°. het reëele gedeelte van $\overline{Z}(j\omega)$ moet voor elke frequentie gelijk aan of grooter dan nul zijn,

2°. de polen van $\overline{Z}(\lambda)$ moeten een neg. reëel deel bezitten. Dat deze voorwaarden noodzakelijk zijn is aanstonds duidelijk, immers worden bestaanbare impedanties slechts voorgesteld door punten op de imaginaire as en rechts daarvan in het complexe vlak, en kan voorts de amplitude van eigentrillingen slechts afnemen. Dat de voorwaarden echter ook voldoende zijn, wordt in het artikel aangetoond.

Passen we de resultaten van Brune's uiteenzettingen op het onderhavige probleem toe, dan blijkt, dat een realiseerbare, aan onze eischen voldoende functie het volgende verloop zal hebben: voor de frequentie *10.000 Hz* ergens binnen de bijbehoorende cirkel, dus in het eerste kwadrant van het complexe vlak, liggende neemt het reëele deel der functie toe en het imaginaire deel af bij afnemende frequentie om bij *4000* à *5000 Hz* de reëele as te snijden; bij nog lager wordende frequentie nemen modulus en reëel gedeelte snel toe. Teneinde nu een analytische uitdrukking te vinden, stellen we:

$$\overline{Z}_{10\cdot000} = r + js = \overline{Z}(j\omega_r)$$

$$\overline{Z}_{4\cdot000} = p + jp' = \overline{Z}(j\omega_p)$$

$$\overline{Z}_0 = q$$

en gaan na welke vormen van $\overline{Z}(\lambda)$ bruikbaar zijn en met welk resultaat. De eenvoudigste vorm, die voor ons doel geschikt is, ziet er als volgt uit:

$$\overline{Z}(\lambda) = \frac{a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2}{b_0 + b_1\lambda}$$

Hierin komen vier onafhankelijke coefficienten voor, terwijl de voorwaarden voor realiseerbaarheid inhouden, dat alle coefficienten positief moeten zijn en bovendien $a_1 b_1 - a_2 b_0 > 0$.

Nemen we nu overeenkomstig het bovenstaande $p' = 0$, dan kunnen nog drie der grootheden p, q, r en s gekozen worden met inachtname van de beperkende voorwaarde, die omgevormd geeft:

$$s^2_{min} = \frac{\omega_r^2 (p - r)^3}{r\omega_r^2 - p\omega_p^2}$$

Aangezien ω_r vastligt en r weinig variatie toelaat is ook na te gaan welke waarden van p en ω_p een oplossing toelaten; daarvoor moet immers s_{min} liggen binnen de voor *10000 Hz* als gewenscht aangegeven cirkel. Teineinde q zoo groot mogelijk te maken nemen we de hoogst toelaatbare waarde van s, want

$$q = \frac{s^2 \omega_p^2 + (p-r)(p\omega_r^2 - r\omega_p^2)}{(p-r)(\omega_r^2 - \omega_p^2)}$$

en daarmede is dan de functie vastgelegd. De coefficienten worden nu gegeven door de vergelijkingen:

$$\frac{b_1}{b_0} = \sqrt{\frac{\omega_r^2(q-p) - \omega_p^2(q-r)}{\omega_r^2\omega_p^2(p-r)}} \quad \frac{a_0}{b_0} = q \quad \frac{a_1}{b_0} = p\frac{b_1}{b_0} \quad \frac{a_2}{b_0} = \frac{q-p}{\omega_p^2}$$

Volgens Brune is deze functie nu te realiseeren in de schakeling van fig. 9.

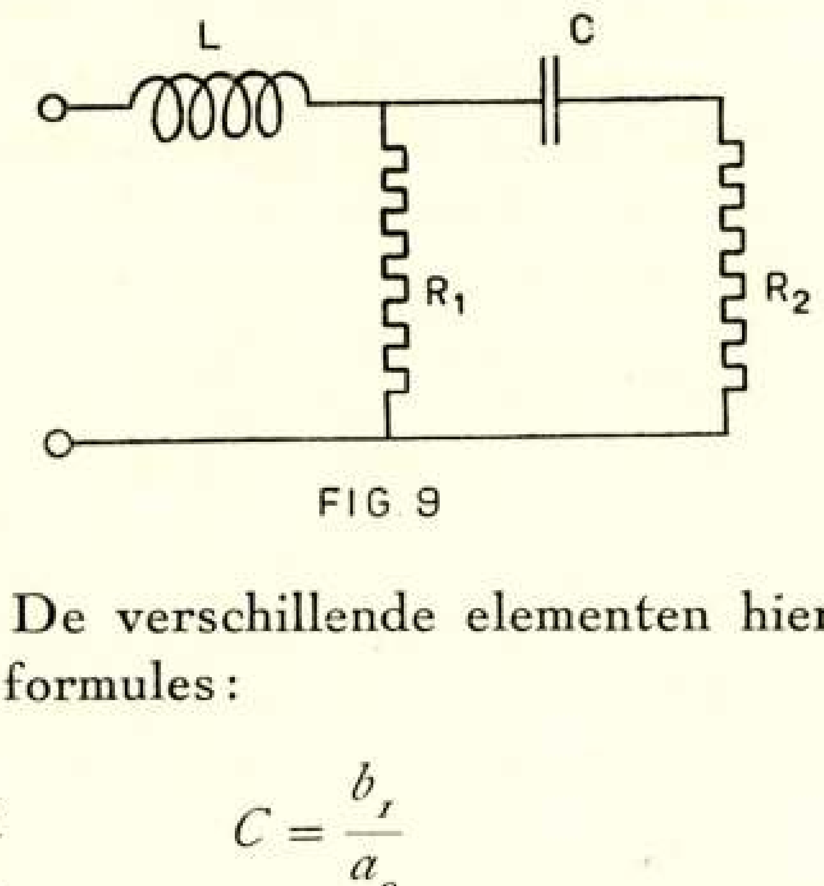


FIG 9

ling van fig. 9. De verschillende elementen hiervan worden berekend met de formules:

$$L = \frac{a_2}{b_1} \qquad C = \frac{b_1}{a_0}$$

$$R_1 = \frac{a_0}{b_0} \qquad R_2 = \frac{a_0(a_1 b_1 - a_2 b_0)}{a_0 b_1^2 - a_1 b_0 b_1 + a_2 b_0^2}$$

In het geval van fig. 8 vinden we als de ongeveer gunstigste oplossing $L = 14{,}3\ mH$ $R_1 = 818\ Ohm$ $C = 0{,}029\ \mu F$ $R_2 = 0$. Deze waarde van R_1 zal in bepaalde gevallen een te groote belasting beteekenen. Daarom loont het de moeite nog een ingewikkelder schakeling te bezien:

$$\overline{Z}(\lambda) = \frac{a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2}{b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2}$$

Deze heeft een graad van vrijheid meer. Gaan we op overeenkomstige wijze te werk als in het vorige geval dan vinden we, bij passende keuze van p, p', r en s, door middel van de voorwaarde voor realiseerbaarheid een vierkantsvergelijking in q, die twee grenswaarden van q bepaalt. In het tusschenliggende

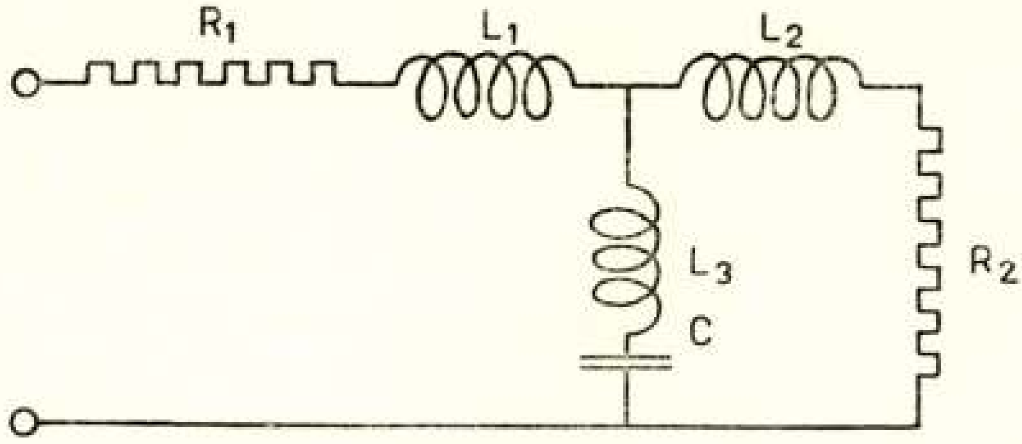


FIG 10

interval liggen de physisch realiseerbare waarden. De schakeling krijgt nu de vorm van fig. 10. Weer aansluitende op fig. 8 vinden we als ongeveer gunstigste oplossing: $R_1 = 60\ Ohm$ $R_2 = 940\ Ohm$ $L_1 = 14{,}6\ mH$ $L_2 = 8{,}9\ mH$ $L_3 = -5{,}5\ mH$ $C = 0{,}015\ \mu F$. Eén zelfinductie wordt zoodoende negatief! Fig.

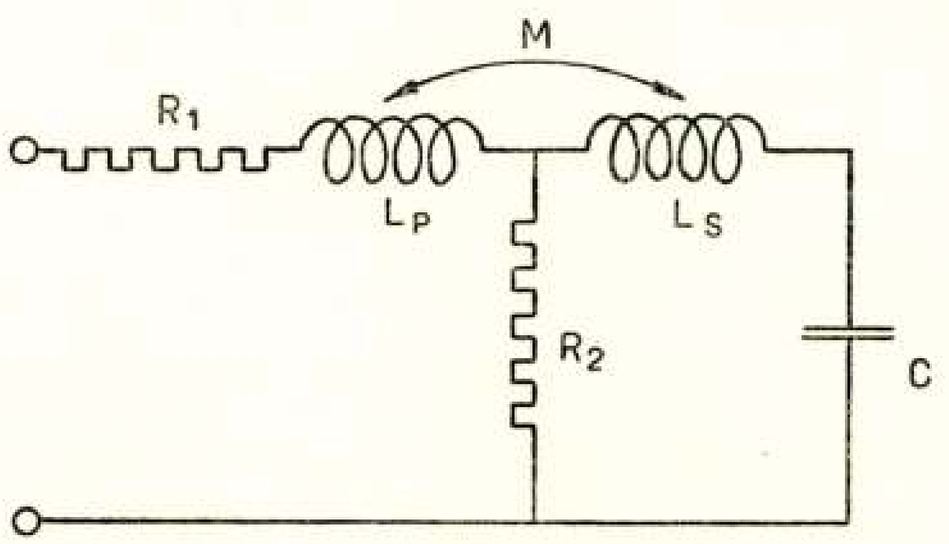


FIG.11

10 is echter equivalent met fig. 11 als $L_p = 9{,}1\ mH$ $L_s = 3{,}4\ mH$ en $M = 5{,}5\ mH$. Dit beteekent een koppelingsfactor $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = 1$ welke waarde voor het onderhavige doel voldoende te benaderen is. Een waarde $k = 0{,}975$ is immers zeer goed bereikbaar bij luchtspoelen.

Deze schakeling is eenigszins beter dan de voorgaande. Gaan we verder door nog ingewikkelder functies te beschouwen, dan vinden we impedantiegrafieken met lussen, die storend werken, en met een ook overigens niet aantrekkelijk verloop. Van de gevonden schakelingen kan gezegd worden, dat ze het net teveel belasten, dan dat ze op alle voedingkabels van een gegeven

net zouden kunnen worden toegepast om de werking der verdeelnetcapaciteit te compenseeren. Wel kunnen ze echter met vrucht worden aangewend teneinde een bepaalde groep, die door omstandigheden, hetzij voorzien, hetzij onvoorzien, ongunstige verhoudingen vertoont, te verbeteren. Afhankelijk van de situatie blijkt bij *10.000 Hz* in vele gevallen een 50 à 100% hoogere ingangsimpedantie te bereiken.

De invloed van de toegevoegde impedantie op de spanningsverhouding dient vanzelfsprekend te worden nagegaan. Het verloop der impedantie als functie der frequentie blijft echter zoodanig, dat hier in het algemeen geen moeilijkheden zijn te verwachten.

Wordt het aantal der ingeschakelde luidsprekers grooter, dan is dat slechts gunstig voor de ingangsimpedantie bij de hooge frequenties. De luidsprekerimpedantie werkt daar namelijk in

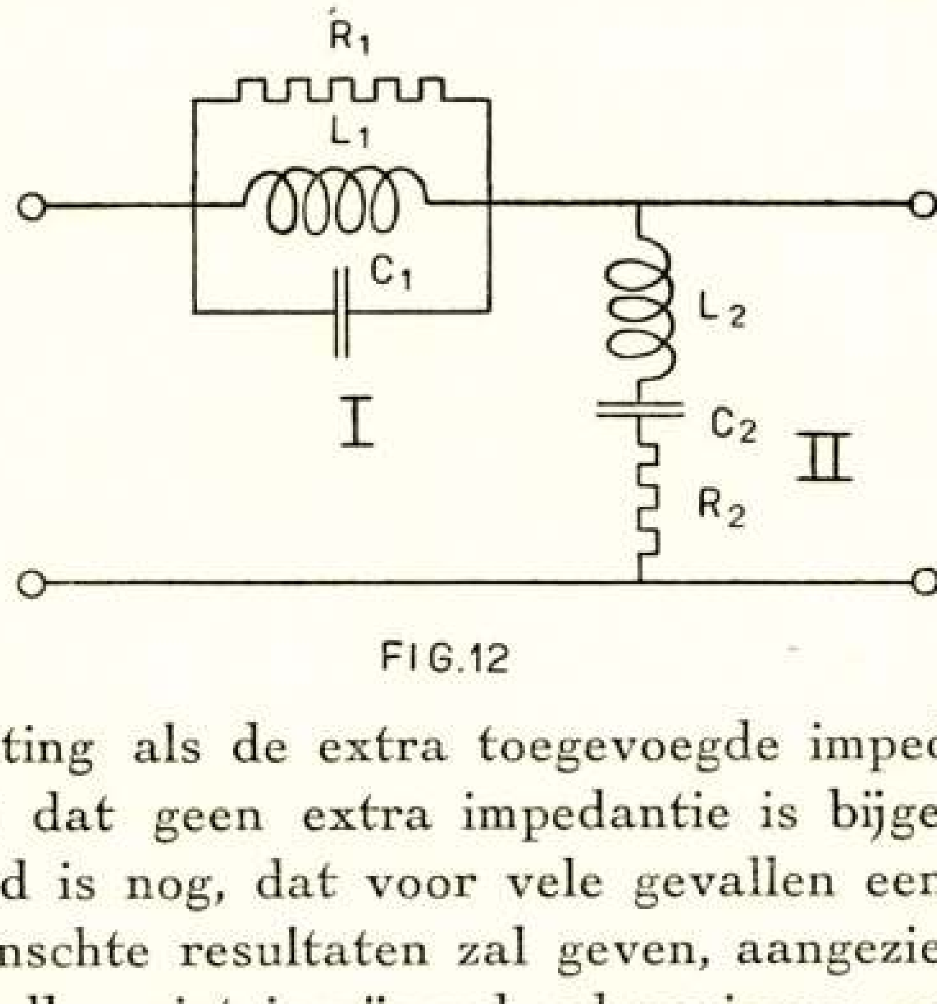


FIG. 12

dezelfde richting als de extra toegevoegde impedantie, evenals in het geval dat geen extra impedantie is bijgeschakeld. Opmerkenswaard is nog, dat voor vele gevallen eenzelfde schakeling de gewenschte resultaten zal geven, aangezien fig. 8 in voorkomende gevallen niet ingrijpend zal varieeren en bovendien op zichzelf eenige vrijheid toelaat in de bepaling der impedantiefuncties.

Tenslotte zij nog medegedeeld, dat het schakelen van een vierpool volgens fig. 12 tusschen de voedingkabel en verdeelnet ook de gezochte verbetering kan geven. De resonantie van kring I wordt dan gekozen bij ca. *10.000 Hz* en die in kring II bij ca. *6000 Hz*. De verhoudingen kunnen gemakkelijk zoo genomen worden, dat de spreiding van den transformator in dit geval gunstig werkt. L_1 moet zoo klein zijn dat de vierpool bij de lage frequentie vrijwel geen spanningsverlies geeft en C_2 moet eveneens klein zijn, opdat bij dezelfde frequenties geen belasting

gevormd wordt. De juiste waarden kunnen door eenig probeeren in de cirkeldiagrammen van den voedingkabel worden gevonden. Meestal zullen resonantiekringen ontstaan, die niet aperiodisch zijn, doch voldoende sterk gedempt. Het nagaan van de spanningskarakteristiek vraagt in deze schakeling bijzondere zorg. In gevallen waar de eisch van geringe belasting een belangrijke rol speelt verdient de schakeling volgens fig. 12 de voorkeur.

TIJDSCHRIFT VAN HET NEDERLANDSCH RADIOGENOOTSCHAP
DEEL IX NOVEMBER 1941 No. 4

VAN HET VERLEDEN TOT HET HEDEN IN DE RADIO

door

N. KOOMANS

Chef van het Radiolaboratorium van het Staatsbedrijf der P.T.T. te 's Gravenhage, Holland.

Voordracht gehouden voor het Nederlandsch Radio Genootschap op 4 April 1941.

Mij is verzocht ter gelegenheid van de jaarvergadering van het Nederlandsch Radio Genootschap eenige oogenblikken Uw aandacht bezig te houden met de behandeling van een algemeen onderwerp de Radio betreffende.

Het meest aangewezen scheen het mij toe om mij daartoe te wenden tot de algemeene gezichtspunten die zich voordoen, wanneer de ontwikkelingsgang van de Radio aan een beschouwing wordt onderworpen.

Het is daarbij niet wel mogelijk om in een gezelschap als het onze wat nieuws te vertellen; de bedoeling is slechts U voor te gaan om met elkander nog eens onze herinneringen te doorloopen om dan bij het heden wat langer stil te staan. Wij dienen daarbij uit te gaan van de proeven van Hertz en Marconi, waarbij valt op te merken, dat deze werkten met golven van eenige centimeters resp. van eenige meters. Er valt daarbij te wijzen op den merkwaardigen gang van zaken, dat de radiotechniek schijnbaar wederkeerend tot haar uitgangspunt eerst vele jaren later haar groote triomphen vierde in de kortegolf-telegrafie en -telefonie. Waarom de ontwikkeling der Radio dien kronkelgang doorliep vindt zijn oorsprong in het feit, dat Hertz en Marconi met sterk gedempte golven werkten, die door electrische vonken werden opgewekt, waarbij ter vermijding van boogvorming de electrische vonken niet te snel op elkaar mochten volgen.

De aether werd derhalve zoodanig bewerkt, dat deze met

tusschenpoozen stootsgewijze eenige snel wegdempende trillingen uitvoerde, waarbij de rusttijden de werktijden duizenden malen overtroffen.

Met een dergelijke energietoediening aan den aether, als het ware om het uur een lepel, waren geen groote resultaten te bereiken. De techniek heeft jaren noodig gehad om hierin verbetering te brengen. Men verlengde de golftreinen per vonk en vergrootte het aantal vonken per secunde, totdat men er eindelijk in slaagde den grooten principiëelen stap te doen om continue golven op te wekken. Een herinnering aan het vele werk dat daarbij werd verricht doemt in vagen omtrek voor ons op bij het te binnen brengen van de woorden toonvonk, bluschvonk, meervoudige vonk, roteerende vonk, stootopwekking en inductieve aankoppeling van de antenne en dergelijke.

De stap die men deed door continue golven op te wekken, was aanvankelijk meer principieel dan volledig, daar men slechts in staat was doorloopende golven te maken op zeer lange golflengte. De middelen, welke daartoe ter beschikking kwamen, beperkten zich aanvankelijk tot de booglamp en de hoogfrequentie-machine.

De booglamp diende voor de trillingsopwekking labiel te worden gemaakt door de boogruimte te koelen door passende gassen of door waterafkoeling van de warmwordende electrode en door de toepassing van blaasmagneten. Beide middelen bedreigden den ionisatietoestand van de boogruimte en daarmede de stabiele bestaansvoorwaarde voor den boog. De trillingsmogelijkheid die daardoor ontstond bepaalde zich tot langzame trillingen. Het opwekken van korte continue golven bleef ondanks hardnekkige pogingen onmogelijk.

Ook aan de hoogfrequentie-machine kleefde dezelfde beperking. Hoewel men de hoogfrequentie-machine unipolair uitvoerde en veelpolig maakte stelde de isoleermogelijkheid en de omtreksnelheid van de machine grenzen aan de wisselstroomfrequentie, die men kon opwekken.

Ook bij de machine is men niet aanstonds gezwicht voor de frequentiebeperking. Door frequentievermenigvuldiging heeft men getracht die beperking meester te worden.

Technisch zeer vernuftige machines heeft men daartoe gebouwd. Men denke daarbij aan de machines van Bethenod en Latour, waarbij een derde harmonische op den voorgrond werd gebracht en aan de machine van Goldschmidt met zijn ingenieuze additieve frequentievermeerdering.

Ook op het gebied van de statische frequentie-transformatoren, welke op de toepassing van meer of minder magnetische verzadiging berusten, is buitengewoon werk verricht. Aanvankelijk ongedachte frequentievermenigvuldiging met bevredigende rendementen zijn daarbij tot stand gebracht.

Deze laatste middelen zijn echter in hun ontwikkelingsperiode volledig verdrongen door de vacuumlampen. Dit alzijdig wonder, dat kon gelijkrichten, versterken, begrenzen, genereeren, enz. heeft tenslotte gaandeweg alle andere middelen verdrongen.

Natuurlijk heeft het onderkennen van deze gunstige eigenschappen en de constructieve vormgeving voor de verschillende doeleinden tijd gekost. Evenwel vormt een dergelijke nieuw aangeboorde rijke bron voor de physische en technische wereld een zoodanige attractie, dat een ontzaglijke hoeveelheid onderzoekingswerk door de vele medewerkers betrekkelijk vlug wordt verricht.

Met behulp van de vacuumlamp kunnen practisch gesproken electrische trillingen van iedere frequentie worden opgewekt. Iedere golflengte kan daarmede worden gemaakt. De continue korte golven stonden daarmede ter beschikking.

Dat er nog eenigen tijd verliep voordat de korte golven hun triomftocht konden beginnen, lag niet zoozeer aan kleinere constructieve moeilijkheden die moesten worden overwonnen, dan wel hieraan dat eerst de ontdekking moest worden gedaan dat deze golven voor het overbruggen van de grootste aardsche afstanden bijzonder geschikt waren en grootere resultaten opleverden, dan met de lange golven waren te bereiken. Toen deze ontdekking, welker gewichtigheid en eclatantie die van een vacuumlamp zelf benadert, eenmaal was gedaan, werd het internationale onderzoekerscorps in wedijverende beweging gebracht en werden de moeilijkheden van de tweede orde, zooals het verkrijgen van stabiliteit en het verhelpen van de fading, in stormloop op de bekende wijzen opgelost.

Zeer belangrijk werk op het gebied van de frequentiestabilisatie is daarbij verricht door gebruikmaking van de kristalbesturing.

De circulaire ontwikkelingsgang van de Radio, die door de opeenvolging van de ontdekkingen en ervaringen is veroorzaakt, is niettemin merkwaardig te noemen.

Evenwel was de radiotechniek enorm verrijkt, toen zij terugcirkelde naar haar punt van uitgang, de kortegolf.

Tot deze verrijking behoort ongetwijfeld ook de verdieping

van het inzicht in de atmosfeer, die de aarde omgeeft en waar doorheen de golven hun weg nemen.

Ging bij de proeven van Hertz de theorie voorspellend vooraan, bij de wonderbare voortplanting van de golven langs de aarde brachten de experimenten dit wonder aan den dag en leverde de theorie de verhelderende nabeschouwing, door in het licht te stellen, dat bij de lange golven de ionosfeer reflecteerend haar geleidingsvermogen op den voorgrond brengt en bij de korte golven haar diëlectrische constante waardoor een geleidelijke breking ontstaat.

De veranderlijke configuratie van de ionosfeer met de zonnebestraling, die behalve de regelmatige dagelijksche en jaarlijksche perioden, ook nog andere perioden kent en verder incidenteele veranderingen vertoont, geeft aan het geheele voortplantingsverschijnsel een grillig karakter.

Deze grilligheid brengt golflengtewisseling voor het onderhouden van het verkeer met zich mede, dagelijks, jaarlijks en incidenteel; welke golflengteband, voor een bepaalde richting en op een bepaald oogenblik, aangewezen is, hangt af van de configuratie van de ionosfeer. Van deze laatste hangt ook af wat ongeveer de kortste golflengte is, waarmede groote afstanden kunnen worden overbrugd, althans afstanden, waarbij noemenswaardig de kromming van de aarde moet worden gevolgd. Voor commercieel verkeer, dat niet afhankelijk kan zijn van incidenteele gewilligheid van de ionosfeer, volgen de golven beneden de 14 meter de kromming van de aarde onvoldoende en begint het horizoneffect steeds sterker op den voorgrond te treden.

Voor het radioverkeer hebben de meter-, decimeter- en centimetergolven geen beteekenis meer. Slechts voor speciale doeleinden, vliegtuigbakens, militair korteafstandsverkeer en dergelijke kunnen deze golven dienen. Waar voor het richten van golf uit- en instraling antennecomplexen, althans hulpmiddelen noodig zijn, waarvan de afmetingen in golflengten kunnen worden gemeten, laten deze golven zich wel zeer scherp richten, waardoor een zekere compensatie aanwezig is tegenover de ongunstige houding, die de atmosfeer jegens de ultra korte golven aan den dag legt.

Verrassingen op dit golflengtegebied in dien zin, dat in de toekomst nog eens zou kunnen blijken dat een golflengteband in dit gebied niettemin de kromming van de aarde zou volgen en dus voor radioverkeer bruikbaar zou zijn, schijnt wel uitgesloten. Stelde de ionosfeer voor de lange golven de geleidbaar-

heid op den voorgrond en voor de korte golven de diëlectrische constante, een derde bepalende grootheid, die nog een ander golflengtegebied langs de aarde zou doen krommen, ontbreekt tot heden.

Toen de techniek zoover was voortgeschreden dat men in staat was continue golven op te wekken, kon een aanvang worden gemaakt met het verwezenlijken van het gewichtigste verkeersmiddel de radiotelefonie, dat tegenwoordig in den vorm van een radio-omroep en het transatlantisch radio-telefoonverkeer zulk een geweldige rol speelt. De wijze om de radiotelefonie te verwezenlijken lag voor de hand in den vorm van de amplitude-modulatie, die dan ook als vanzelf zijn intrede deed, hoewel ongewilde phase-modulatie vooral in den eersten tijd kwaliteitsbedreiging teweeg bracht.

Daar de verkeerstelefonie eerst haar vlucht nam op de korte golven, ging de gewone radio-omroep, die van langere golven gebruik maakt, in haar ontwikkeling vooraan. Snel en tot enorme afmetingen is die ontwikkeling verloopen van amateurapparaat tot muziekdoos in ieders hand. De ingeruimde golflengtebanden zijn daarbij ingenomen en zelfs meer dan dat, zoodat de beschikbare golflengte per omroepstation in vele gevallen te klein is geworden om een goede kwaliteit van de ontvangst te verzekeren. Met de gewone amplitude-modulatie met haar draaggolf en beide zijbanden begonnen, kan men nu niet meer terug en zit men vast aan deze geld- en frequentieruimte verkwistende methode. Kon men nu nog eens opnieuw beginnen met de kennis en ervaring inmiddels opgedaan, dan zou de toepassing van de éénzijbandmethode aangewezen en practisch voor den omroep wel te verwezenlijken zijn. Echter beleeft de omroep zijn leven ook maar eenmaal en dient men zich neer te leggen bij dit levensresultaat.

Niettemin heeft het Staatsbedrijf der P.T.T. nog eenige pogingen gewaagd om uit de impasse van het golflengten-tekort te geraken. Daartoe werd aan de internationale conferentie van het C.C.I.R. te Lissabon een omstandig rapport ingediend, waarin de invoering van een omroepsysteem, dat gebruik maakt van een draaggolf met één zijband, werd bepleit, zulks op grond van proefuitzendingen die op een golflengte van 1875 meter door Kootwijk waren uitgezonden, waardoor de maatgevende landen in Europa in de gelegenheid waren gesteld een op waarnemingen gegrond oordeel te vormen. Beurtelings werd daarbij door snelle omschakeling hetzelfde programma eenmaal gewoon en eenmaal

met één zijband uitgezonden in een voor de luisteraars onbekende volgorde.

Uit de vele ontvangen rapporten was daarbij gebleken, dat op de gewone omroeptoestellen door niemand verschil was geconstateerd. Voor zoover van voorkeur sprake was, werd zelfs de éénzijband geprefereerd.

Het voorstel van de P.T.T. behelsde om als overgangstoestand de éénzijband met draaggolf als uitzendmethode in te voeren, waardoor de gelegenheid bestond geleidelijk de invoering mogelijk te maken van ontvangtoestellen met draaggolfbijmenging, hetgeen een uitbreiding van de fadingvrije-zône van ieder zendstation beteekent. Waren nadien alle ontvangtoestellen van draaggolfbijmenging voorzien, dan zou ten laatste de draaggolf bij het uitzenden kunnen worden weggelaten, waardoor de ideale toestand zou worden bereikt.

De logge internationale samenwerking maakte de doorvoering van het voorgestelde plan niet mogelijk.

Een tweede voorstel ter verbetering van de omroeptoestanden werd door de Nederlandsche P.T.T. gericht aan de internationale conferentie van het C.C.I.R. te Boekarest. Daarin werd een zendmethode ontwikkeld waarbij werd uitgezonden een draaggolf met twee ongelijke zijbanden. De eene zijband omvatte alleen de lage tonen tot 1500 à 2000 trillingen en de tweede zijband gaf het volledige spectrum, reden waarom het systeem werd genoemd „omroep met asymmetrische zijbanden". Het geheel bestond derhalve uit de superpositie van twee modulatie-complexen. Het eene complex bestond uit de lage tonen, die met twee zijbanden werden uitgezonden. Beide werden in passende sterkte met passende draaggolf tot een geheel tezamen gevoegd, dat geschikt was om door een gewonen omroepontvanger te worden ontvangen. De theoretische vervorming die daarbij optrad, was te verwaarloozen, omdat de sterke lage tonen correct met twee zijbanden werden weergegeven en de zwakke hooge tonen, die slechts een timbre-bepalend karakter dragen, met één zijband, waarbij de modulatiediepte echter zoo gering is, dat praktisch van geen vervorming sprake kan zijn.

Een proefinstallatie was geconstrueerd, waaraan de noodige metingen werden verricht en praktische waarnemingen werden gedaan. Aangetoond werd, dat zoowel bandbreedtebesparing als kwaliteitsverbetering door uitbreiding van het laagfrequente spectrum kon worden verkregen. Ook konden beide gelijktijdig worden tot stand gebracht.

Meer dan belangstelling vermocht het voorstel ter conferentie niet te trekken. Op dergelijke conferenties komt slechts ten koste van enorm veel papier en veel moeite het allernoodzakelijkste nauwelijks tot stand.

Bij de radioverkeerstelefonie is de situatie anders. Wel is men ook daarbij met de complete amplitudemodulatie begonnen en heeft men daaraan langen tijd, min of meer tot heden toe, vastgehouden. Echter is hierbij de overgang tot den éénzijband niet aan die bezwaren onderhevig. Bij den radio-omroep is het niet mogelijk om alle zenders en ontvangers, waarin zoovele millioenen zijn geïnvesteerd, zonder meer te veranderen of te vervangen. Bij de verkeersradiotelefonie, die door staten of groote maatschappijen worden bedreven, bestaan die bezwaren niet of in mindere mate. Bovendien kunnen de ontvangtoestellen, die niet door particuliere personen maar door deskundig personeel worden bediend, aan geheel andere eischen voldoen.

Dat men in de wereld zoo langen tijd aan de primitieve, min of meer barbaarsche tweezijbandmethode heeft vastgehouden, die tegenover den éénzijband niets anders dan ernstige nadeelen heeft te stellen, is aan een samenloop van omstandigheden te wijten. Wellicht heeft men de uitvoeringsmoeilijkheden voor de korte golven overschat en de te behalen resultaten verre onderschat. Er zijn van die uitvindingen, die zoozeer in de gunst van de omstandigheden vallen, dat haar uiteindelijke beteekenis grooter is, dan zelfs wordt verwacht door den uitvinder, die toch in den regel aan optimisme geen gebrek heeft.

Het is gebleken, dat hiertoe de éénzijband ook behoort. We kunnen hier uit ondervinding spreken, omdat de Nederlandsche en Indische P.T.T.-diensten in deze in de gelegenheid zijn geweest pioniersdiensten te verrichten. Onze publieke kortegolfradiotelefoonverbinding tusschen Nederland en Indië ging vooraan, terwijl op deze verbinding later het eerst de kortegolf éénzijband werd toegepast en tot een multipelstelsel werd uitgebreid.

We herinneren ons nog levendig hoe, toen eenmaal de apparatuur moeizaam was samengesteld, de resultaten de verwachting overtroffen. Alles bleek even gunstig te zijn, alles viel mede, inderdaad een situatie, die den onderzoeker vreemd aandoet, daar hij het tegendeel gewend is.

Ten bewijze van deze uitspraak strekt de navolgende opsomming van de voordeelen aan het éénzijbandsysteem verbonden.

1e. De energie-besparing bij de uitzending is bijna volledig te noemen,

a. door de afwezigheid van de overbodige draaggolf, die anders verreweg de meeste energie opeischt, waartegen de tevens bespaarde tweede zijband in het niet verzinkt;

b. door het feit dat geen energie wordt uitgezonden als er niet gesproken wordt, daar bij een betaald gesprek ruzie in den regel wordt vermeden en slechts één persoon tegelijk spreekt, terwijl tusschen het gesprokene pauzen plegen voor te komen.

2e. Met de energiebesparing valt lampruimtebesparing samen. Met dezelfde lampen in den eindtrap van den zender heeft men een 16 maal zoo krachtigen zender als met het tweezijbandsysteem met draaggolf het geval zou zijn. Een zijband beslaat nl. bij 100% modulatie een kwart van de totaal beschikbare en ingenomen amplituderuimte, indien een draaggolf en 2 zijbanden voorhanden zijn. Is slechts één zijband alleen aanwezig dan kan deze viermaal zoo sterk zijn als de geheele amplituderuimte in beslag wordt genomen en de zender dus 16 maal zoo sterk worden geacht, waarbij wordt aangenomen, dat de tweede zijband voor de ontvangst van geen beteekenis is, hetgeen toelaatbaar is, daar een tweede zijband, door phasedraaiing in de ionosfeer in een frequentiemodulatie-positie kan komen te verkeeren en schade veroorzaken.

3e. Er treedt besparing van bandbreedte op, waardoor de levensruimte van de Radio wordt vergroot.

4e. Het systeem geeft wat meer geheimhouding dan de gewone telefonie, die met iederen ontvanger kan worden ontvangen. Het bijmengen van de draaggolf op de ontvangplaats veroorzaakt om deze draaggolf constant te maken eenige moeite en voorzorg.

5e. De gloeidraden van de lampen van den eindtrap en van de andere versterkertrappen op den zender kunnen met wisselstroom worden gevoed. Amplitudebrom ontstaat hierdoor niet. Door de afwezigheid van de draaggolf kunnen aan weerszijden daarvan geen bromzijbandjes ontstaan. Hoogstens kunnen zich bromzijbandjes vormen om de zwakke individueele frequenties, die zich in één zijband bevinden. Deze zijbandjes detecteeren zich tegen de op de ontvangplaats bijgemengde draaggolf en komen als

toontjes voor den dag, die zwak zijn en verschillende toonhoogte bezitten, hetgeen practisch niet waarneembaar is.

6e. Phasemodulatiegeratel wordt op de ontvangplaats ook niet opgemerkt. De ontbrekende draaggolf voorkomt zulks om ongeveer dezelfde redenen als hierboven ten aanzien van de amplitudebrom is uiteengezet.

7e. De ontvangst wordt gekenmerkt door betere kwaliteit, aangezien de fatale selectieve fading op de draaggolf ontbreekt, daar deze op de ontvangplaats versch wordt bijgemengd. Het resultaat is, dat een éénzijbandgesprek niet langer een radiogesprek is, gekenmerkt door den hinderlijk met de fadingregeling in sterkte op- en neergaanden storingsachtergrond, maar een gesprek, dat van een lijngesprek niet is te onderscheiden.

8e. Door de afwezigheid van de sterke draaggolf kunnen een aantal multipelkanalen met minder bezwaar worden tot stand gebracht. Is, zooals bij tweezijbandgesprekken, de draaggolf wel aanwezig, dan is overspreken van de verschillende gesprekken onderling moeilijk te vermijden.

Hierboven is van belangrijke kwaliteitsverbetering van de telefonie-overdracht bij het gebruik van één zijband sprake. Evenwel is het een feit, dat vooral muziekoverbrenging over transatlantische afstanden nog te wenschen overlaat en dat hierbij geen gewone omroepkwaliteit wordt bereikt.

Hoewel men verbaasd moet zijn, dat afstanden van tienduizend km en meer door de grillige ionosfeer door een gecompliceerde telefoniemodulatie kunnen worden afgelegd en dat daarbij op de ontvangplaats nog iets kan worden tevoorschijn gebracht, dat op het uitgezondene lijkt is men in de laatste jaren er niettemin in geslaagd om het uitzicht te openen hierin verbetering te brengen. Het indrukwekkend werk door de A.T.T. in Amerika in dit opzicht verricht en het M.U.S.A. systeem, dat daaruit is voortgekomen, heeft niet alleen belangrijk nieuw feitenmateriaal aan den dag gebracht, doch tevens nieuwe mogelijkheden geopend en althans ten deele verwezenlijkt.

Alvorens deze resultaten te vermelden zij er eerst aan herinnerd, dat de radiotelegrafie van gewone telegrafie tot sneltelegrafie is voortgeschreden, zonder moeilijkheden van de ionosfeer te ondervinden. De noodzaak van verdieping van het inzicht van het uit- en instralen van de antennes is daarbij niet zoozeer aan den dag getreden.

Alleen toen de beeldtelegrafie werd ingevoerd, welke bij de

gewenschte snelle opeenvolging van de beeldpunten een ultrasneltelegrafie beteekende, zijn wel moeilijkheden aan den dag gekomen, die destijds tot opgeven van dit vraagstuk hebben geleid.

Toen men meende in de beeldtelegrafie een herhaalsysteem en een sneltelegrafie tegelijktijdig te kunnen verwezenlijken is het gebleken, dat bij opvoering van de snelheid de ontvangst van de opvolgende beeldpunten door elkander liep. Men heeft toen zulks opgegeven met de overweging, dat blijkbaar opvolgend aankomende stralen tijdsverschillen met zich brachten, die in dezelfde grootte-orde vielen als de tijdstusschenruimten van de opvolgende beeldpunten.

De conclusie evenwel, dat meerdere stralen aanwezig zijn, die tijdsverschil vertoonen en dat zulks aan den dag treedt bij het seinen van korte seinen, heeft wellicht ertoe geleid om in die richting systematische proeven te nemen, die ook aan de telefonie zouden ten goede komen.

Om deze proeven te kunnen nemen is evenwel noodig geweest dat eerst antennes werden geconstrueerd, die scherp in het verticale vlak gericht waren, daar het voor de hand lag na te gaan of die verschillende stralen soms onder verschillende hoeken op de ontvangplaats binnentraden.

Niet voldoende echter dat men scherp in het verticale vlak gerichte antennes diende te bezitten, het was tevens gewenscht deze antennes richtbaar te maken, zoodat men den verticalen instraalhoek naar believen kon veranderen. Te dien einde is de ruitantenne ontwikkeld en nauwkeurig onderzocht, ook ten aanzien van de bodemreflectie. De ruitantenne bezit het voordeel laag bij den grond en goedkoop te zijn en tevens zoogenaamd aperiodisch, d.i. voor een breeden golfband geschikt.

Een vermeerderde scherpte van de richtkarakteristiek en de richtbaarheid werd verkregen door de ontvangst van een aantal achter elkaar in de richting van het te ontvangen station geplaatste ruiten te combineeren onder aanwending van een phaseregeling tusschen de opvolgende ruiten. De regelbaarheid van de phase brengt de richtbaarheid teweeg.

De onderzoekingen van de A.T.T. met behulp van stootsignalen hebben aan het licht gebracht:

1e. dat een stootsignaal op de ontvangplaats ontvangen wordt onder verschillende verticale instraalhoeken, die verschillende stralen voorstellen. Niet uit alle richtingen in het verticale vlak komt dus de stralingsenergie gelijkelijk,

daarin zijn stralen te onderkennen. Soms is er in hoofdzaak één straal, dan weer 2, 3 of meer stralen. Zulks hangt af van de configuratie van de ionosfeer.

2e. Tusschen deze stralen bestaan looptijdverschillen, m.a.w. deze stralen komen na elkander aan.

3e. De vlakst inkomende straal komt het eerst, de stijlst inkomende het laatst.

4e. Elk der stralen vertoont op zichzelf sterktewisseling. De stralen zijn dus niet enkelvoudig, doch stellen een bundel stralen voor, waartusschen looptijdenverschillen van geringe orde bestaan. Deze bundel bestaat minstens uit de beide componenten voortkomend uit de dubbele breking, veroorzaakt door het aardmagnetische veld.

5e. De sterktewisseling der stralen is grooter en vertoont de neiging langzamer te verloopen dan het geval zou zijn, wanneer men bij een continue seingeving alle stralen tezamen voegde.

6e. De selectieve fading in elk der stralen is geringer dan in de gecombineerde stralen tezamen.

Indien men nu door scherp gerichte antennemiddelen de stralen afzonderlijk ontvangt en het ontvangene na looptijdcorrectie samenvoegt, dan bereikt men:

1e. dat alle aankomende energie wordt benut en een goede verhouding van signaal tot storing wordt verkregen;

2e. dat de fading wordt verminderd, daar deze bij de verschillende stralen niet samenvalt;

3e. dat kwaliteitsverbetering intreedt, doordat tijdsverschovensamenvoeging is opgeheven. Deze kwaliteitsverbetering schijnt wel het voornaamste resultaat. De transatlantische omroep kan vooral voor de muziek verbetering van kwaliteit bijzonder gebruiken. Bovendien vermindert kwaliteitsverbetering bij commercieele gesprekken het navragen.

De A.T.T. heeft de inrichting die dit alles verwezenlijkt het M.U.S.A. systeem genoemd, als afkorting van Multiple Unit Steerable Antenna, in welke benaming de ideale doelstelling is belichaamd, nl. een serie ruitantennes, door splitsversterkers als het ware verveelvuldigd, de verschillende kanalen voor verschillende golflengten dienende en elk kanaal meervoudig richtbaar volgens verschillende opstraalhoeken, waaruit de ontvangsten passend worden samengesteld.

De A.T.T. heeft een commercieel M.U.S.A.-systeem bestaande uit niet minder dan 16 ruitantennes tusschen New York en

Londen ingericht. Uitgezonden worden twee zijbanden met verschillende modulatie, dus 2 kanalen en een verzwakte draaggolf als stuurfrequentie. De eene zijband grenst aan de draaggolf, de tweede is hiervan gescheiden door een frequentie-tusschenruimte ter breedte van één zijband.

Twee ontvangmethoden ter vermindering van de fading zijn toegepast en onderling vergeleken.

Bij de eene methode werd de ontvangst van drie instraalhoeken na looptijd-correctie gecombineerd.

Bij de andere methode wordt automatisch de ontvangst uit dien hoek gekozen, die op het betrokken oogenblik het sterkste is.

Bij de eerste methode kan geen locaal opgewekte draaggolf met uiteraard willekeurige phase worden gebezigd voor de demodulatie, aangezien hierbij willekeurige laagfrequente phaseverhoudingen zouden ontstaan, welke niet meer in een looptijdverschil kunnen worden uitgedrukt.

Looptijdcorrectie door inschakeling van vertragingsnetwerken kan dan niet worden toegepast.

Bij deze methode dient daarom de verzwakte stuurdraaggolf van elk der drie stralenbundels te worden uitgefilterd en versterkt, om daarna voor de demodulatie te worden gebruikt.

Bij de tweede methode bestaat de mogelijkheid om voor de demodulatie eenvoudig een locaal opgewekte draaggolf toe te passen; looptijdcorrectie is dan overbodig, waardoor het geheel belangrijk eenvoudiger wordt.

Alleen kan als nadeel worden opgemerkt, dat niet alle ontvangstenergie wordt benut, zooals bij de andere methode het geval is. Van beteekenis schijnt dit laatste evenwel niet, daar door de A.T.T. wordt opgegeven, dat dit energieverlies kan worden gecompenseerd door een 1,25 maal sterkeren zender.

Neemt men bovendien in aanmerking, dat het phase-zuiver combineeren van de ontvangsten uit de verschillende hoeken een precaire aangelegenheid is, zoodat de grillige ionosfeer door veranderingen in den invalshoek phaseverstoring kan teweeg brengen, terwijl ook nog niet bewezen is, dat phase-zuiver combineeren over een gebied dat meer dan 3000 perioden van de draaggolf verwijderd is, practisch uitvoerbaar is, dan is te verwachten, dat in de toekomst zal worden gebruikt de ontvangstmethode, waarbij automatisch de invalshoek wordt gekozen, die de sterkste ontvangst vertoont.

Voor het aangeven van de uitzichten van dit systeem kun-

nen wij niet beter doen dan hier weer te geven de slotbeschouwing door de A.T.T. zelf opgesteld naar aanleiding van een gedachtenwisseling die door ons Laboratorium met de A.T.T. werd gevoerd en die ons bereikte kort voor dat ons land in den oorlog werd betrokken.

„Onze ervaring met het commercieele M.U.S.A.-ontvangsysteem laat weinig twijfel over dat hiermede onder bepaalde atmosferische omstandigheden een belangrijke verbetering in kwaliteit en in de verhouding signaal-storing kan worden verkregen. Er dient op gewezen te worden dat gedurende een groot deel van den tijd waarin waarnemingen met het M.U.S.A.-systeem werden verricht, de ontvangen veldsterkte zoo groot was, dat een enkele antenne en ontvanger reeds een zoo groot mogelijke verhouding signaal-storing hadden. Ontvangers en zenders worden gewoonlijk gebouwd voor een maximale verhouding signaal-storing van 45 tot 60 db en onverschillig hoe groot de ontvangen veldsterkte is, zal de verhouding signaal-storing aan den uitgang niet grooter zijn dan de hiervoor genoemde waarde. Bijgevolg zal het M.U.S.A.-systeem geen voordeel opleveren bij zeer hooge veldsterkten. Bij lagere veldsterkten, waar een verbetering van meer belang is, geeft het M.U.S.A.-systeem verbetering indien de verbinding niet te zeer gestoord is. Wanneer de verhouding signaal-storing even goed is als op een enkele antenne en ontvanger, is de kwaliteit met een M.U.S.A.-systeem bijna altijd beter. Er zijn minder herhalingen noodig in gesprekken en de verhooging van het natuurlijke weergeven van het gesprokene beteekent een verbetering, die moeilijk is uit te drukken in aequivalente decibels van de verhouding signaal-storing.

Uit onze ervaring is niet gebleken wat de juiste afmetingen voor een M.U.S.A.-antennesysteem zouden moeten zijn. Mogelijk gebruiken wij meer antennes dan economisch verantwoord is op grond van de kosten en den tijdsduur waarin verbetering kan worden verkregen.

Gedurende bepaalde magnetische stormen vonden wij dat de invalshoeken niet duidelijk te onderscheiden waren en dat zij snel veranderden van oogenblik tot oogenblik. Onder deze omstandigheden is niet te verwachten dat het M.U.S.A-systeem noemenswaardige verbetering geeft, hetgeen de ervaring bevestigt. Bij andere magnetische stormen neemt de amplitude van het ontvangen signaal sterk af, maar de invalshoeken blijven vrij goed gedifferentieerd, zoodat een merkbare verbetering met het M.U.S.A.-systeem kan worden bereikt.

Tenslotte moet erop gewezen worden dat, hoewel wij een aanzienlijke ervaring verworven hebben met M.U.S.A.-ontvangsystemen, onze ervaring zich nog niet over een zoo lange periode uitstrekt, dat wij zeer nauwkeurig kunnen voorspellen wat in iedere bepaalde periode verwacht kan worden."

Tot heden is er alleen sprake van een M.U.S.A.-ontvangsysteem. Uiteraard is ook denkbaar een dergelijk zendsysteem, waarmede men dus onder scherpe, veranderlijke hoeken kan opstralen. Dat daarmede nieuwe feiten aan den dag kunnen worden gebracht is waarschijnlijk. Echter is met deze proefnemingen nog meer gemoeid dan met het ontvangsysteem het geval was. Een ontvangsysteem kan men op zichzelf beschouwen, daar de waarnemingen aldaar plaats vinden. Een zendsysteem moet door een ontvangsysteem worden beoordeeld, hetgeen het onderzoek compliceert. In een land waar de mogelijkheden onbegrensd zijn, zal ook deze zaak wellicht eenmaal ter hand worden genomen.

Waar we de grenzen van het heden en de toekomst hebben bereikt en ten deele overschreden, schijnt het gewenscht tevens melding te maken van het nieuwe frequentie-modulatie systeem van Armstrong, waarover in Amerika zooveel ophef wordt gemaakt en dat vele pennen in beweging heeft gebracht.

Voordien is frequentiemodulatie slechts een welbekende theoretische mogelijkheid geweest, die het nimmer tot een practische toepassing had gebracht.

De oorzaak moet worden toegeschreven aan de omstandigheid, dat de methoden, welke ter beschikking stonden om deze modulatie op te wekken, met een behoorlijke kwaliteit slechts een beperkte frequentie-verandering veroorloven, nog afgezien van het primaire feit, dat geen aanleiding voorhanden scheen om dit systeem te gaan toepassen, waar theoretische analyse had aangetoond, dat het tegendeel van bandbreedte besparing viel te bereiken.

Het is teekenend voor den inventieven gedachtengang van Armstrong, die zich o.a. als den ontdekker van het regeneratieve principe als een bijzonder uitvinder heeft doen kennen, dat deze oorsponkelijke geest zonder gebruik te maken van berekening, welke bezigheid hem minder ligt, voorspellend heeft ingezien, dat een frequentie-modulatie, waarvan de frequentie-uitslagen tot 100000 á 150000 Hertz worden verhoogd door toepassing van een groote mate van frequentievermenigvuldiging, als een nieuw technisch fenomeen zich gunstig moet gedragen t.o.v. de storingen, die zich in de atmosfeer bevinden.

De strijd om de verhouding van signaal tot storing is in de Radio een klassiek vraagstuk, waarvoor duizende oplossingen zijn verzonnen en duizende patenten zijn verleend. In den loop van den tijd evenwel hebben de storingen zich doen kennen als een ongeneeselijke ziekte, die eveneens door een overmaat van geneesmiddelen wordt gekenmerkt.

Het eenige middel tegen storingen is tenslotte gebleken selectieve ontvangst naar richting en frequentie. Hoe smaller men de frequentie-signaalband uit den met storingen bezwangerden aether grijpt, hoe beter de verhouding van signaal tot storing uitvalt.

Deze laatste storingswijsheid, die het storingsvraagstuk voorgoed scheen te hebben afgesloten, geldt echter alleen als men het signaal als amplitude-modulatie uitzendt, d.w.z. hetzelfde karakter verleent als de storingen bezitten. Het ligt voor de hand te vermoeden, dat storingen amplitude-modulaties zijn, die hoogstens wanneer één der zijbanden wegvalt een zwakke frequentie-modulatie kan vertoonen.

Wil men zich dus van de storingen meer onafhankelijk maken, dan moet men het signaal dus principieel op andere wijze aan den aether toevertrouwen. Dat een opzettelijk ver doorgevoerde frequentie-modulatie hieraan kan voldoen, lijkt à priori waarschijnlijk. Welke ingewikkelde storingsbronnen zouden er moeten bestaan, die de atmosfeer op een dergelijke gekunstelde wijze in beweging brachten. Hoe grooter de frequentie-uitslagen van de frequentie-modulatie zijn, hoe beter de verhouding tot de toevallig aanwezige frequentie-modulatie in den aether wordt.

De tegenstelling met het oude recept is volkomen. Bij de frequentie-modulatie geldt: hoe grooter bandbreedte, dus hoe onselectiever de ontvangst ten behoeve van het opvangen van de uitgezonden groote frequentie-uitslagen, hoe beter de verhouding signaal tot storing uitvalt.

Bij de demodulatie zal men een methode moeten toepassen, bv. begrenzing, die de amplitude-modulatie der storingen belet toe te treden tot het demodulatie-product. De praktijk heeft het inzicht van Armstrong bevestigd. Met weinig energie zijn groote resultaten te bereiken en verheft men zich boven de storingen.

Het is typisch hoe een nieuw inzicht, dat zich buiten de rekensfeer bevindt, zooveel strijd tusschen de theoretici heeft ontketend en zooveel verrassingen heeft gebaard. Het geheel schijnt

een demonstratie, die aantoont hoe analytisch de doorsnee mensch denkt, voor zoover hij denkt.

Natuurlijk is ook deze zaak thans afdoend in theoretische kannen en kruiken gekomen en daarmede van zijn twijfel, doch ook van zijn charme ontdaan, zooals de analyse meestal de plaats gehad hebbende synthese doet vergeten.

De practische beteekenis van het Armstrong-systeem schijnt gering; door de groote bandbreedte, die het inneemt, is het beperkt te worden toegepast in het gebied van de golven beneden de 10 meter. Daar in dit gebied de overbrugging van noemenswaardige afstanden niet mogelijk is, schijnt de aanleiding om daarvoor den aether lastig te vallen weinig voorhanden, te meer daar er ook nog leidingen in de wereld zijn.

Hetzelfde geldt ook voor de televisie, waar deze tot hetzelfde golflengte-gebied is beperkt. Van radio-standpunt gezien meenen we dan ook dat het geen zin heeft, aan dezen tak van de techniek een beschouwing te wijden. Zoolang een afstandsoverbrugging, die eenige beteekenis heeft, onmogelijk is, blijft de televisie een op zichzelf staand complex van onvervulbare wenschdroomen, reclame en prestige-overwegingen en van vernuftige en allerinteressantste detail-constructies en onderzoekingen.

DE TRANSFORMATOREIGENSCHAPPEN VAN EEN VIERPOOL

door

J. VAN SLOOTEN

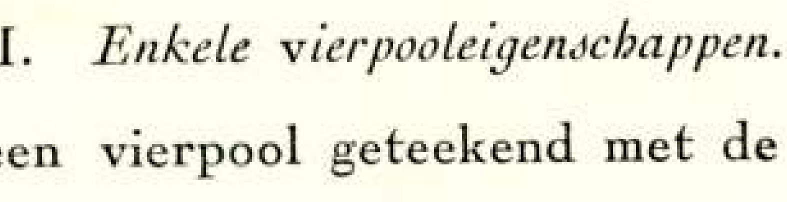
Natuurkundig Laboratorium der N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken, Eindhoven, Holland.

Samenvatting.

Een electrische vierpool kan worden opgevat als een transformator, die een aan de uitgangsklemmen aangesloten impedantie omzet in een andere, aan de ingangsklemmen optredende impedantie, waarbij de laatste beschouwd wordt als een functie van de eerste, Het blijkt, dat er in het algemeen twee verschillende uitgangsimpedanties bestaan, die daarbij niet van waarde veranderen. Door hiervan gebruik te maken, kunnen de zg. vierpoolvergelijkingen in een vorm gebracht worden, die voor verschillende toepassingen voordeelen biedt. Als toepassing worden twee eenvoudige diagrammen gegeven voor de gevallen, waarbij de vierpool bestaat uit een niet-ideale transformator (met eindige zelfinducties en spreiding), respectievelijk uit een stuk verliesvrije kabel.

I. *Enkele vierpooleigenschappen.*

In fig. 1 is een vierpool geteekend met de ingangsklemmen



Figuur 1.
Schematische voorstelling van een vierpool. 1 en 2 zijn de ingangs-, 3 en 4 uitgangsklemmen. De stroomen en spanningen worden positief gerekend in de richting van de geteekende pijltjes.

1 en 2 en de uitgangsklemmen 3 en 4. De primaire spanning en stroom zijn aangeduid met E_1 en I_1, de secundaire spanning en stroom door E_2 en I_2. Deze E's en I's worden positief gerekend in de richting van de geteekende pijltjes. De hier gekozen positieve richtingen, die een zekere onsymmetrie vertoonen, hebben het voordeel, dat een aan de uitgangsklemmen aangesloten impedantie Z_2 gegeven is door:

$$Z_2 = \frac{E_2}{I_2}, \qquad 1)$$

terwijl de tusschen de ingangsklemmen optredende impedantie volgt uit

$$Z_1 = \frac{E_1}{I_1}. \qquad 2)$$

Hierbij en in het volgende is verondersteld, dat de E's en de I's stationnaire wisselstroomgrootheden zijn, in de zin van de elementaire wisselstroomtheorie. Eveneens is verondersteld, dat de vierpool zelf geen spannings- of stroombronnen bevat.

In de vierpooltheorie is het gebruikelijk om b.v. de primaire stroom en spanning uit te drukken als een lineaire combinatie van de secundaire stroom en spanning, b.v. als volgt:

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= a_{11}E_2 + a_{12}I_2 \\ I_1 &= a_{21}E_2 + a_{22}I_2 \end{aligned}\right\} \qquad \text{I)}$$

De mogelijkheid daarvan berust op de lineaire stroom-spanningskarakteristiek van de in de vierpool aanwezige schakelelementen, zooals weerstanden, capaciteiten, zelfinducties en wederkeerige inducties. De coëfficiënten a_{11} t/m a_{22} in I) zullen in het algemeen functies zijn van de hoekfrequentie ω, waar voor een gegeven ω zijn zij verder onafhankelijk van de E's en de I's. In het volgende zullen wij verschillende voorbeelden hiervan ontmoeten.

Denken wij ons de vierpool inwendig opgebouwd uit mazen en is de wisselwerking of de koppeling tusschen ieder tweetal van die mazen symmetrisch, wat steeds het geval is, als de vierpool uitsluitend is opgebouwd uit de bovengenoemde schakelelementen, dan geldt de wet van de reciprociteit, die tot uitdrukking komt door de betrekking [1]):

[1]) Zie hiervoor b.v. E. A. Guillemin, Communication Networks, Vol. I, Chap. IV, en Vol. II. Chap. IV.

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1 \qquad \text{II)}$$

Bevat de vierpool echter b.v. versterkerbuizen als koppeling tusschen verschillende mazen, dan is in het algemeen niet meer voldaan aan II). Wel kan worden toegelaten, dat de vierpool negatieve weerstanden bevat. In het volgende zullen we veronderstellen, dat aan II) is voldaan.

Wordt de vierpool omgedraaid, zoodat de ingangsklemmen uitgangsklemmen worden en omgekeerd, dan blijkt het, dat we voor deze nieuwe vierpool dezelfde betrekkingen I) krijgen, echter met onderlinge verwisseling der waarden van a_{11} en a_{22}. Hiervoor is evenwel noodig, dat voldaan is aan II).

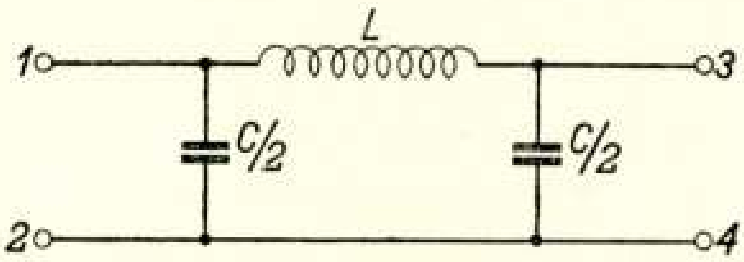
Bij een *symmetrische* vierpool, d.w.z. een vierpool, waarvan de werking niet verandert bij onderlinge verwisseling van de ingangs- en uitgangsklemmen, geldt dus de betrekking:

$$a_{11} = a_{22} \,. \qquad 3)$$

Bij een gegeven vierpool kan hieraan soms slechts voor één of enkele frequenties zijn voldaan.

In het volgende is niet verondersteld, dat we met een symmetrische vierpool te doen hebben, hoewel zal blijken, dat sommige der af te leiden betrekkingen sterk vereenvoudigd worden bij aannemen van 3).

Als voorbeeld van een symmetrische vierpool kunnen we de in fig. 2 geteekende low-pass filtercel nemen. Een eenvoudige



Figuur 2.
Low-pass filtercel.

berekening leert, dat de vierpoolvergelijkingen zijn:

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= \left(1 - \frac{\omega^2 LC}{2}\right) E_2 + j\omega L\, I_2 \\ I_1 &= \left(1 - \frac{\omega^2 LC}{4}\right) j\omega C\, E_2 + \left(1 - \frac{\omega^2 LC}{2}\right) I_2 \end{aligned}\right\} \qquad 4)$$

Zooals we zien, is voldaan aan II) en 3).

Voeren we nu de reeds door 1) en 2) gedefinieerde uitgangs-

impedantie Z_2 en ingangsimpedantie Z_1 in, dan kunnen we I) schrijven als:

$$Z_1 = \frac{a_{11} Z_2 + a_{12}}{a_{21} Z_2 + a_{22}} \qquad \text{III)}$$

Door III) wordt de vierpool opgevat als een *impedantie-transformator*.

We vragen nu, welke impedanties Z_x door de transformatie III) niet veranderen. Deze volgen uit $Z_1 = Z_2 = Z_x$ dus uit:

$$Z_x (a_{21} Z_x + a_{22}) = a_{11} Z_x + a_{12} \, .$$

Dit is een vierkantsvergelijking voor Z_x, met als oplossing:

$$Z_x = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{21}} \pm \sqrt{\frac{(a_{11} - a_{22})^2}{4a_{21}{}^2} + \frac{a_{12}}{a_{21}}} \qquad 5)$$

Door gebruik te maken van II) ontstaat:

$$Z_x = \frac{1}{2a_{21}} \left\{ a_{11} - a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4} \right\} \qquad 6)$$

Voor een symmetrische vierpool wordt 5):

$$Z_x = \pm \sqrt{\frac{a_{12}}{a_{21}}} \qquad 7)$$

We vinden dus twee dergelijke impedanties, de z.g. *iteratieve impedanties*, d.w.z. die zich herhalen bij tusschenschakeling van de vierpool.

Sluiten we nu op de uitgangsklemmen een impedantie aan, die gelijk is aan een iteratieve impedantie, dan ontstaan de primaire E en I uit de secundaire E en I, door deze met *dezelfde* constante λ (in het algemeen complex) te vermenigvuldigen, want het quotiënt E/I blijft onveranderd. We vinden deze λ dus uit:

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \lambda E_2 = a_{11} E_2 + a_{12} I_2 \\ I_1 &= \lambda I_2 = a_{21} E_2 + a_{22} I_2 \end{aligned} \right\} \qquad 8)$$

of, anders geschreven:

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - \lambda) E_2 + a_{12} I_2 &= 0 \\ a_{21} E_2 + (a_{22} - \lambda) I_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \qquad 9)$$

Aan 9) kunnen we met van nul verschillende E_2 en I_2 alleen voldoen, wanneer de determinant van deze vergelijkingen nul is. Tenslotte volgt λ dus uit:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad 10)$$

In wiskundige terminologie beteekent 10), dat de λ's (één voor iedere iteratieve impedantie) de z.g. „eigenwaarden" zijn van de matrix:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad 11)$$

Uitgeschreven wordt 10):

$$\lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \, .$$

En wegens II):

$$\lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + 1 = 0 \, . \qquad 12)$$

Dus:

$$\lambda = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4} \, . \qquad 13)$$

Hierbij is weer gebruik gemaakt van II). We kunnen echter opmerken, dat we, uitgaande van III), door teller en noemer van het rechterlid van III) met een geschikt getal te vermenigvuldigen, steeds aan II) kunnen voldoen, ook al was daar oorspronkelijk in I) niet aan voldaan. De geheele volgende behandeling kan in verband hiermede dus eenvoudig uitgebreid worden tot vierpolen, waarin de wet tot de reciprociteit niet geldt. De in dat geval door 13) gedefinieerde λ's hebben dan echter geen directe physische beteekenis meer.

We zien in 13) en 6) dezelfde wortelvorm optreden. Eenvoudig kan worden gecontrôleerd, dat bij de Z_x met het plusteeken bij de wortelvorm in 6) ook behoort de λ met het plusteeken in 13).

We onderscheiden dus Z_{x1} met λ_1 en Z_{x2} met λ_2. Nu volgt uit 12) $\lambda_1 \lambda_2 = 1$, dus:

$$\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_2} \qquad 14)$$

We zien hieruit, dat wanneer voor Z_{x1} een verzwakking optreedt in de vierpool ($|E_1| > |E_2|$), we voor Z_{x2} een versterking vinden. Een dergelijke versterking kan b.v. optreden door resonantieverschijnselen of doordat Z_{x2} een negatieve weerstand bevat.

We kunnen de λ's nog in verband brengen met de z.g. *voortplantingsconstante* T, die bij afsluiting van de vierpool door een iteratieve impedantie wordt gedefinieerd door:

$$\left.\begin{aligned} E_2 &= e^{-T} E_1 \\ I_2 &= e^{-T} I_1 \end{aligned}\right\} \qquad 15)$$

of:

$$\lambda = e^{T} \qquad 16)$$

In verband met 14) geldt:

$$\lambda_1 = e^{T_1} = \frac{1}{\lambda_2} = e^{-T_2} .$$

We krijgen dus $T_1 = - T_2$ en beide volgen uit:

$$\cosh T = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \qquad 17)$$

II. *De vierpoolvergelijking in canonische vorm*

Mathematisch gesproken is I) een homogene lineaire transformatie van twee (complexe) variabelen, III) een projectieve transformatie van één (complexe) variabele [1]). De voornaamste eigenschap van de projectieve transformatie is, dat de dubbelverhouding van 4 punten voor en na de transformatie dezelfde is. Deze eigenschap blijft gelden voor een complexe variabele. In fig. 3 zijn 4 punten Z_P, Z_Q, Z_A en Z_B in het complexe vlak aangegeven. De dubbelverhouding (Z_P, Z_Q, Z_A, Z_B), d.w.z.:

$$\frac{Z_P - Z_A}{Z_P - Z_B} \cdot \frac{Z_Q - Z_B}{Z_Q - Z_A}$$

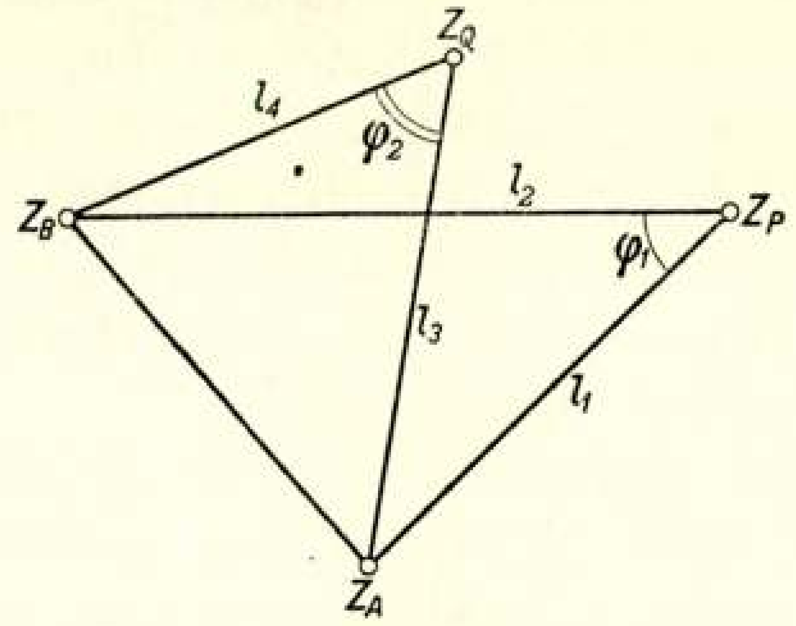
is volgens de elementaire regels voor de optelling en vermenigvuldiging van complexe getallen gelijk aan:

---

[1]) Zie hiervoor b.v. J. A. Barrau, Analytische Meetkunde, eerste deel, pg. 37.

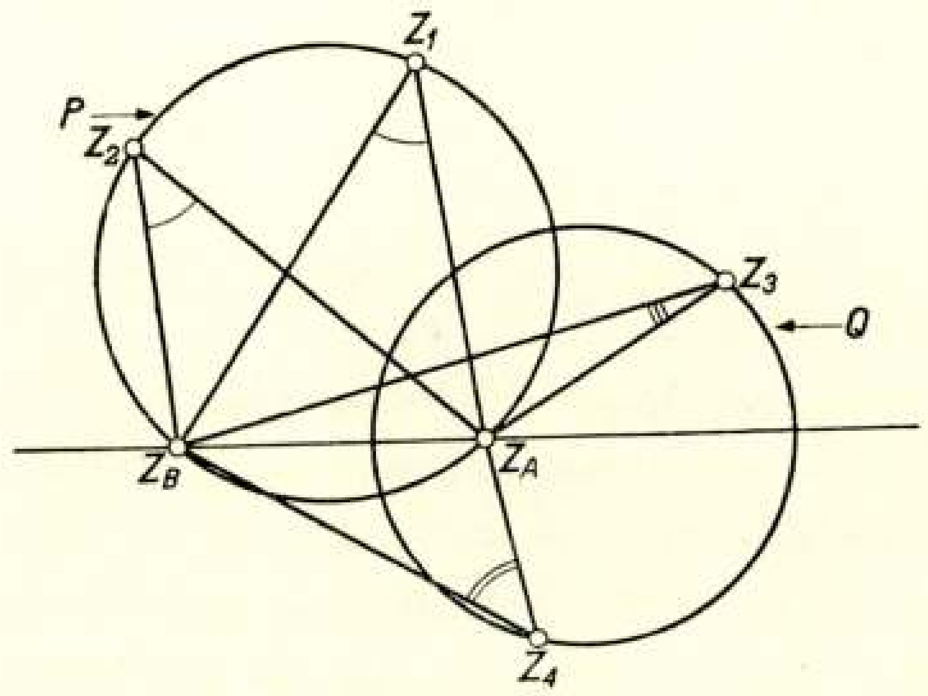
$$\frac{l_1 l_4}{l_2 l_3} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

waarbij de lijnen l_1 t.m. l_4 en de hoeken φ_1 en φ_2 de in de figuur aangeduide beteekenis hebben.



Figuur 3.
Z_P, Z_Q, Z_A en Z_B stellen punten in het complexe vlak voor. De complexe dubbelverhouding (Z_P, Z_Q, Z_A, Z_B) is gelijk aan

$$\frac{l_1 l_4}{l_2 l_3} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$



Figuur 4.
De cirkel P is in het complexe vlak de meetkundige plaats van het punt Z_1, dat samen met het vaste punt Z_2 t.o.v. Z_A en Z_B een reëele dubbelverhouding heeft. Is deze positief, dan liggen Z_1 en Z_2 aan dezelfde zijde van $Z_A Z_B$. De cirkel Q is de meetkundige plaats van het punt Z_3, dat samen met het vaste punt Z_4 t.o.v. Z_A en Z_B een complexe dubbelverhouding van de modulus één heeft. Het middelpunt van Q ligt op de lijn door Z_A en Z_B en voor twee punten op Q is de uitdrukking $\frac{l_1 l_4}{l_2 l_3}$, voorkomende bij fig. 3, gelijk aan één, d.w.z. de verhouding van de verbindingslijnen naar Z_A en Z_B is voor alle punten op Q dezelfde.

De hoek φ_1 (resp. φ_2) moet hierbij positief gerekend worden, wanneer Z_P (resp. Z_Q) rechts ligt van de lijn $Z_A Z_B$, doorloopen in de richting van Z_A naar Z_B.

Uit een elementaire meetkundige beschouwing volgt, dat 4 punten, die in het complexe vlak liggen op een cirkel of op een rechte lijn, een reëele dubbelverhouding hebben. Hieruit volgt de de bekende eigenschap, dat de transformatie III) cirkels in het complexe vlak overvoert in cirkels, waarbij de rechte lijn als grensgeval van een cirkel gerekend moet worden. In verband met wat verder volgt, zijn de twee volgende eigenschappen van belang (zie hiervoor fig. 4):

a) De meetkundige plaats van het punt Z_1, dat samen met het vaste punt Z_2 t.o.v. Z_A en Z_B een dubbelverhouding van veranderlijke modulus, maar argument nul heeft, is een cirkel door de punten Z_A, Z_B en Z_2. De punten Z_1 en Z_2 liggen daarbij aan dezelfde kant van de lijn door Z_A en Z_B. Zie de cirkel P in fig. 4.

b) De meetkundige plaats van het punt Z_3, dat samen met het vaste punt Z_4 t.o.v. Z_A en Z_B een dubbelverhouding van modulus één, maar veranderlijk argument heeft, is een cirkel Q door Z_4. Deze cirkel heeft de eigenschap dat de verhouding van de lijnen $Z_3 Z_A$ en $Z_3 Z_B$, die een veranderlijk punt Z_3, dat de cirkel doorloopt, verbinden met Z_A en Z_B constant is. De cirkel Q heeft zijn middelpunt op het verlengde van de lijn door Z_A en Z_B, gaat door Z_4 en snijdt de cirkels van het type P loodrecht. (De cirkels P en Q zijn exemplaren van twee orthogonale cirkelbundels, die Z_A en Z_B als basispunten hebben).

Om nu de transformatie III) in de z.g. canonische vorm te brengen, nemen we voor Z_A en Z_B de iteratieve impedanties Z_{x1} en Z_{x2}, die bij de transformatie niet veranderen, de zg. dubbelpunten van de transformatie. De willekeurige uitgangsimpedantie Z_2 gaat over in Z_1. De impedantie nul gaat over in $\frac{a_{12}}{a_{22}}$. Schrijven we nu op, dat de dubbelverhouding (Z_2, o, Z_{x1}, Z_{x2}) onveranderd blijft, dan ontstaat:

$$\frac{Z_2 - Z_{x1}}{Z_2 - Z_{x2}} \cdot \frac{Z_{x2}}{Z_{x1}} = \frac{Z_1 - Z_{x1}}{Z_1 - Z_{x2}} \cdot \frac{\frac{a_{12}}{a_{22}} - Z_{x2}}{\frac{a_{12}}{a_{22}} - Z_{x1}}$$

of:

$$\frac{Z_1 - Z_{x1}}{Z_1 - Z_{x2}} = \left\{ \frac{Z_{x2}}{Z_{x1}} \cdot \frac{a_{12} - a_{22} Z_{x1}}{a_{12} - a_{22} Z_{x2}} \right\} \cdot \frac{Z_2 - Z_{x1}}{Z_2 - Z_{x2}} \qquad 18)$$

De uitdrukking tusschen de accolades is onafhankelijk van Z_2 eu wordt uitsluitend bepaald door de vierpoolgrootheden. Zij is dus een constante voor een gegeven frequentie. Deze constante wordt de *multiplicator* q genoemd.

Uit een eenvoudige berekening, onder gebruikmaking van 6), volgt:

$$q = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \left(a_{11} + a_{22} \mp \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4}\right) - 1 \qquad 19)$$

Hoort bij Z_{x1} het plusteeken bij de wortelvorm in 6), dan hoort bij q in 19) het minteeken.

In verband met 13) en 14) geldt ook:

$$q = \lambda_2^2 = \frac{1}{\lambda_1^2} . \qquad 20)$$

Resumeerende kan III) dus geschreven worden als:

$$\boxed{\frac{Z_1 - Z_{x1}}{Z_1 - Z_{x2}} = q \frac{Z_2 - Z_{x1}}{Z_2 - Z_{x2}}} \qquad IV).$$

Deze, de zg. canonische schrijfwijze heeft o.a. het voordeel, dat, wanneer eenige (b.v. n) van dezelfde vierpolen achter elkaar worden geschakeld, men voor de resulteerende vierpool in IV) q slechts hoeft te vervangen door q^n. Op de voordeelen, die dit heeft bij de theorie van de electrische filters, is reeds eens gewezen[1]), maar verder schijnt de schrijfwijze IV) geen bekendheid in de theorie van de electrische netwerken te hebben verkregen.

Uit de verderop volgende toepassingen moge blijken, dat we door IV) tot zeer eenvoudige diagrammen komen voor verschillende veelvuldig voorkomende vierpolen.

De transformatie III) of IV) wordt geclassificeerd naar de waarde, die de multiplicator q heeft. De benamingen, die hiervoor gebruikelijk zijn, zijn ingevoerd door Felix Klein[2]) in

[1]) Ph. le Corbeiller et Ch. Lange, L'Onde Électrique **2**, 1923, 560—570.

[2]) F. Klein, Ges. Werke, Bd. III, pg. 25.

analogie met wat zich in de analytische meetkunde voordoet [1]).

Heeft q de modulus één een een willekeurig argument, dan noemt men de transformatie *elliptisch*. Z_2 en Z_1 liggen hierbij t.o.v. Z_{x1} en Z_{x2} op een cirkel van het type Q (t.o.v. Z_A en Z_B) in fig. 4, dus met constante verhouding der voerstralen naar Z_{x1} en Z_{x2}. Heeft q een reëele en positieve waarde, dan heet de transformatie *hyperbolisch*. Z_2 en Z_1 liggen hierbij op een cirkel door Z_{x1} en Z_{x2} (van het type van de cirkel P in fig. 4), en wel aan één kant van de lijn door Z_{x1} en Z_{x2}. Bij herhaalde toepassing van de transformatie IV) nadert Z_1 tot Z_{x1} of Z_{x2}, naarmate q kleiner of grooter dan één is.

In het algemeen geval, dat de modulus van q van één en het argument van nul verschilt, wordt de transformatie *loxodromisch* genoemd. Bij herhaalde toepassing van IV) liggen de opeenvolgende punten Z op een spiraalvormige figuur.

Een bijzonder geval doet zich nog voor, wanneer de beide iteratieve impedanties samenvallen. Wegens 6) hebben we dan:

$$a_{11} + a_{22} = \pm 2 \tag{21)}$$

$$Z_{x1} = Z_{x2} = Z_0 = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{21}} \tag{22)}$$

Is de vierpool symmetrisch, dan hebben we wegens 7) samenvallende iteratieve impedanties voor $a_{12} = 0$ en voor $a_{21} = 0$.

We moeten nu nog onderscheiden, of de samenvallende iteratieve impedanties in het oneindige liggen of niet. In het eerste geval hebben we klaarblijkelijk $a_{21} = 0$ en wegens II) en 21) volgt $a_{11} = a_{22} = \pm 1$. De transformatie III) wordt dus:

$$Z_1 = Z_2 + \frac{a_{12}}{a_{22}} \tag{23)}$$

Liggen de samenvallende dubbelpunten Z_0 in het eindige, dan is $a_{21} \neq 0$. Door de substitutie $Z' = \dfrac{1}{Z - Z_0}$ kunnen we nu dit paar dubbelpunten naar het oneindige transformeeren, waarna de transformatie de vorm 23), nl.:

$$Z'_1 = Z'_2 + b$$

moet aannemen.

---

[1]) Zie b.v. J. A. Barrau, l.c., pg. 95, 99 en 184.

Via een korte berekening vinden we nu voor het aequivalent van de oorspronkelijke transformatie III):

$$\frac{1}{Z_1 - Z_0} = \frac{1}{Z_2 - Z_0} + \frac{2a_{21}}{a_{11} + a_{22}} = \frac{1}{Z_2 - Z_0} \pm a_{21} \qquad 24)$$

De transformaties 23) en 24) met samenvallende dubbelpunten worden *parabolisch* genoemd.

We zullen nu nagaan, aan welke eischen de coëfficiënten a_{11} t/m a_{22} in I) moeten voldoen om de transformatie III) of IV) elliptisch, respectievelijk hyperbolisch te doen zijn. Daartoe stellen we, in aansluiting aan 20):

$$q = \lambda_2^2 = (\varrho e^{i\varphi})^2 = \varrho^2 e^{2i\varphi} .$$

Hierin is het reëele getal ϱ dus de modulus van λ_2. Voeren we nu in de hulpgrootheid:

$$x = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} ,$$

dan is volgens 13):

$$x - \sqrt{x^2 - 1} = \varrho e^{i\varphi}$$

en hieruit volgt:

$$x = \frac{1}{2} (\varrho e^{i\varphi} + \frac{1}{\varrho} e^{-i\varphi}) . \qquad 26)$$

Voor een elliptische transformatie is noodig $\varrho = 1$. Daardoor wordt 26): $x = \cos\varphi$, en we vinden als voorwaarde voor een elliptische transformatie, dat $a_{11} + a_{22}$ reëel moet zijn en gelegen tusschen $+2$ en -2.

Voor een hyperbolische transformatie is $\varphi = 0$ of $\varphi = \pi$ en we vinden als voorwaarde uit 26), dat $a_{11} + a_{22}$ reëel moet zijn en grooter dan 2 of kleiner dan -2.

Als overgangsgeval vinden we de reeds besproken parabolische transformatie ($a_{11} + a_{22} = \pm 2$).

Wanneer we nu terug gaan tot de in fig. 2 geteekende lowpass filtercel, dan zien we, dat we daarbij verschillende mogelijkheden krijgen.

In het z.g. *doorlaatgebied*, gegeven door $\omega^2 LC < 4$ is de transformatie elliptisch. De iteratieve impedanties zijn een positieve en een negatieve weerstand, gegeven door 7), nl.:

$$\pm\sqrt{\frac{L}{C}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{\omega^2 LC}{4}\right)}}$$

Voor de grensfrequentie ($\omega^2 LC = 4$) krijgen we een parabolische transformatie van het type 23).

In het z.g. *verzwakkingsgebied* ($\omega^2 LC > 4$) wordt de transformatie hyperbolisch. De iteratieve impedanties zijn nu een positieve en een negatieve zelfinductie (of capaciteit), gegeven door:

$$Z_{x1} = -Z_{x2} = j\sqrt{\frac{L}{C\left(\frac{\omega^2 LC}{4}-1\right)}}$$

Bij de zelfinductie Z_{x1} behoort:

$$\lambda_1 = 1 - \frac{\omega^2 LC}{2} + \frac{\omega^2 LC}{2}\sqrt{1-\frac{4}{\omega^2 LC}}\ .$$

Hoewel dit niet met één oogopslag is te zien, ligt λ_1 voor $\omega^2 LC > 4$ tusschen -1 en 0. Dit beteekent, dat er in de vierpool bij aansluiting van de zelfinductie Z_{x1} een versterking optreedt ($|E_2| > |E_1|$), die tot stand komt door resonantieverschijnselen.

Sluiten we de capaciteit Z_{x2} aan, dan is wegens 14) λ_2 negatief en kleiner dan één ($-1 > \lambda_2 > -\infty$).

Bij aansluiting van Z_{x2} treedt dus een verzwakking op ($|E_2| > |E_1|$).

We besluiten deze paragraaf, door uit 20) en IV) de volgende regel af te lezen:

> Wanneer we een niet-elliptische transformatie hebben, nadert de ingangsimpedantie, onafhankelijk van de uitgangsimpedantie, bij tusschenschakelen van een aantal identieke vierpolen, tot die iteratieve impedantie, waarbij in de vierpool een verzwakking optreedt ($|\lambda| > 1$).

Sluiten we de vierpool dus af met een impedantie, die slechts weinig afwijkt van de andere iteratieve impedantie, dus die met $|\lambda| < 1$, dan vinden we deze afwijking aan de ingangsklemmen vergroot terug.

Daarom kunnen we de Z_x met $|\lambda| > 1$ de stabiele of niet-critische iteratieve impedantie, die met $|\lambda| < 1$ daarentegen de labiele of critische iteratieve impedantie noemen. Dit onder-

scheid kan echter bij een elliptische transformatie wegens $|\lambda| = 1$ niet gemaakt worden.

De heele afleiding, die hier, in aansluiting aan de vergelijking III), is gegeven, kan vrijwel onveranderd herhaald worden, wanneer we in plaats van impedanties $Z = E/I$ admittanties $Y = I/E$ invoeren.

We krijgen dan twee iteratieve admittanties Y_{x1} en Y_{x2} en voor een gegeven vierpool wordt in de vergelijking, die met IV) overeenkomt, de multiplicator q numeriek gelijk aan die voor het impedantiegeval. We krijgen dus:

$$\frac{Y_1 - Y_{x1}}{Y_1 - Y_{x2}} = q\,\frac{Y_2 - Y_{x1}}{Y_2 - Y_{x2}} \qquad \text{IVa)}$$

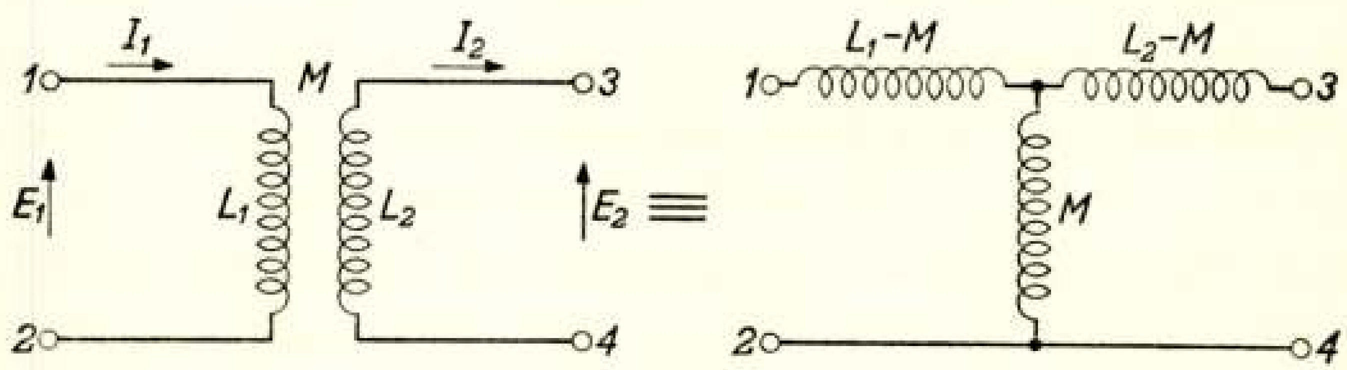
waarin q door 19) en 20) is gegeven en met $Y_{x1} = \dfrac{1}{Z_{x1}}$ en $Y_{x2} = \dfrac{1}{Z_{x2}}$.

Het rekenen met admittanties heeft soms voordeelen boven dat met impedanties.

We zullen nu nog twee toepassingen van de voorafgaande theoretische beschouwingen geven.

III. *Transformatordiagram*

Als eerste toepassing geven we een diagram voor een niet-ideale transformator, dus met eindige zelfinducties en spreiding. Eenvoudigheidshalve verwaarloozen we de weerstanden of de verliezen, die in de transformator optreden. Het schema en een aequivalent vervangingsschema zijn gegeven in fig. 5.



Figuur 5.
Schema en aequivalent vervangingsschema van een transformator. De zelfinducties L_1 en L_2 vormen de primaire en secundaire wikkeling. De coëfficiënt van wederzijdsche inductie is M.

We vinden de volgende vierpoolvergelijkingen:

$$E_1 = \frac{L_1}{M} E_2 - j\omega M \left(1 - \frac{L_1 L_2}{M^2}\right) I_2$$

$$I_1 = \frac{E_2}{j\omega M} + \frac{L_2}{M} I_2 \qquad 27)$$

Wanneer we invoeren:

$$k^2 = \frac{M^2}{L_1 L_2} \qquad \text{en} \qquad n = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

gaat 27) over in:

$$E_1 = \frac{n}{k} E_2 - j\omega M \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) I_2$$

$$I_1 = \frac{E_2}{j\omega M} + \frac{1}{kn} I_2 \qquad 28)$$

Hierin is n dus de transformatieverhouding en k de koppelingsfactor.

De iteratieve impedanties zijn:

$$Z_x = \frac{j\omega M}{2k} \left\{ n - \frac{1}{n} \pm \sqrt{\left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - 4k^2} \right\} \qquad 29)$$

Wegens $k^2 < 1$ is de uitdrukking onder de wortelvorm steeds positief en we zien, dat Z_{x1} (plusteeken) steeds een zelfinductie is en Z_{x2} steeds een capaciteit.

Voor de multiplicator q vinden we:

$$q = \frac{n + \frac{1}{n}}{2k^2} \left\{ n + \frac{1}{n} - \sqrt{\left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - 4k^2} \right\} - 1 \qquad 30)$$

Deze uitdrukking is positief en steeds kleiner dan één, behalve voor $k = 1$ en $n = 1$, waarbij zij gelijk aan één wordt.

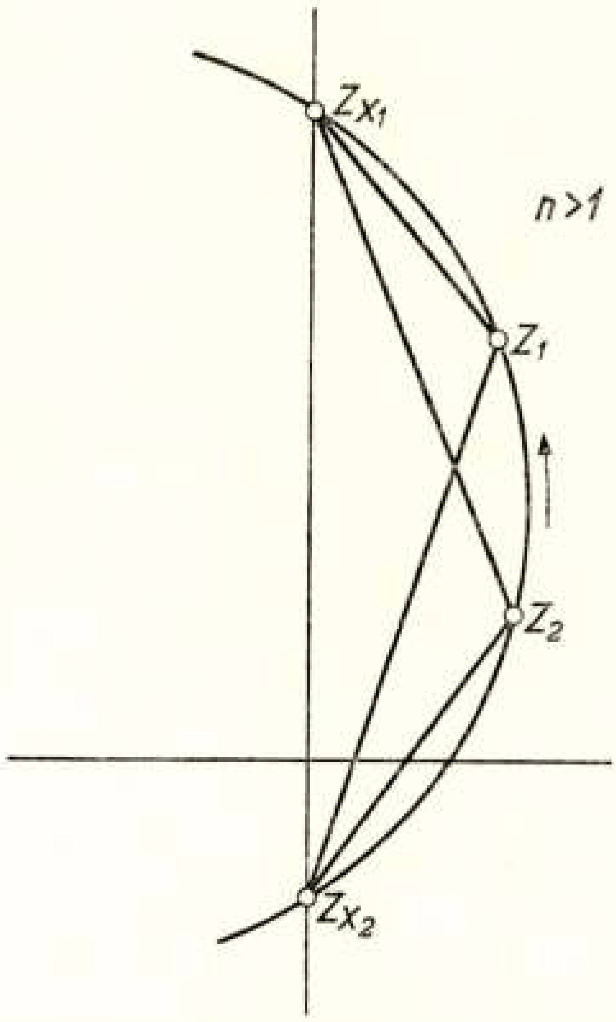
We hebben dus een hyperbolische transformatie en de zelfinductie Z_{x1} is de stabiele iteratieve impedantie. (Voor $n = 1$ en $k = 1$ wordt $q = 1$ en krijgen we een parabolische transformatie van het type 24)). Wanneer we veronderstellen, dat de transformatieverhouding n niet te weinig van één verschilt, kunnen we de wortelvorm in 30) ontwikkelen en vinden als eerste termen voor q:

$$q = \frac{k^2}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^2} + \frac{2k^4}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^4} + \frac{5k^6}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^6} + \frac{14k^8}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^8} + \ldots \qquad 31)$$

We komen dus tot het volgende recept:

Wordt op de transformator aangesloten de secundaire impedantie Z_2, dan vinden we de primaire impedantie Z_1 op de volgende wijze: Z_1 ligt op de cirkel door Z_{x2}, Z_2 en Z_{x1} en wel zoodanig, dat de verhouding der voerstralen naar Z_{x1} en Z_{x2} vermenigvuldigd wordt met q ($q < 1$).

Een voorbeeld hiervan voor $n > 1$ (optransformeeren naar primaire) is gegeven in fig. 6 en een voorbeeld voor $n < 1$ (neertransformeeren naar primaire) in fig. 7.



Figuur 6.

Transformatordiagram in het complexe vlak. Z_2 is de aan de uitgangsklemmen aangesloten impedantie. Z_1 is de aan de ingangsklemmen optredende impedantie. De zelfinductie Z_{x1} en en de capaciteit Z_{x2} zijn de iteratieve impedanties (constanten bij een gegeven frequentie). Het diagram stelt voor een geval van optransformeeren ($Z_2 < Z_1$).

Laten we $k = 1$ worden en de zelfinducties naar oneindig convergeeren, dan ontstaat het diagram van een ideale transformator met de iteratieve impedanties nul en oneindig en met

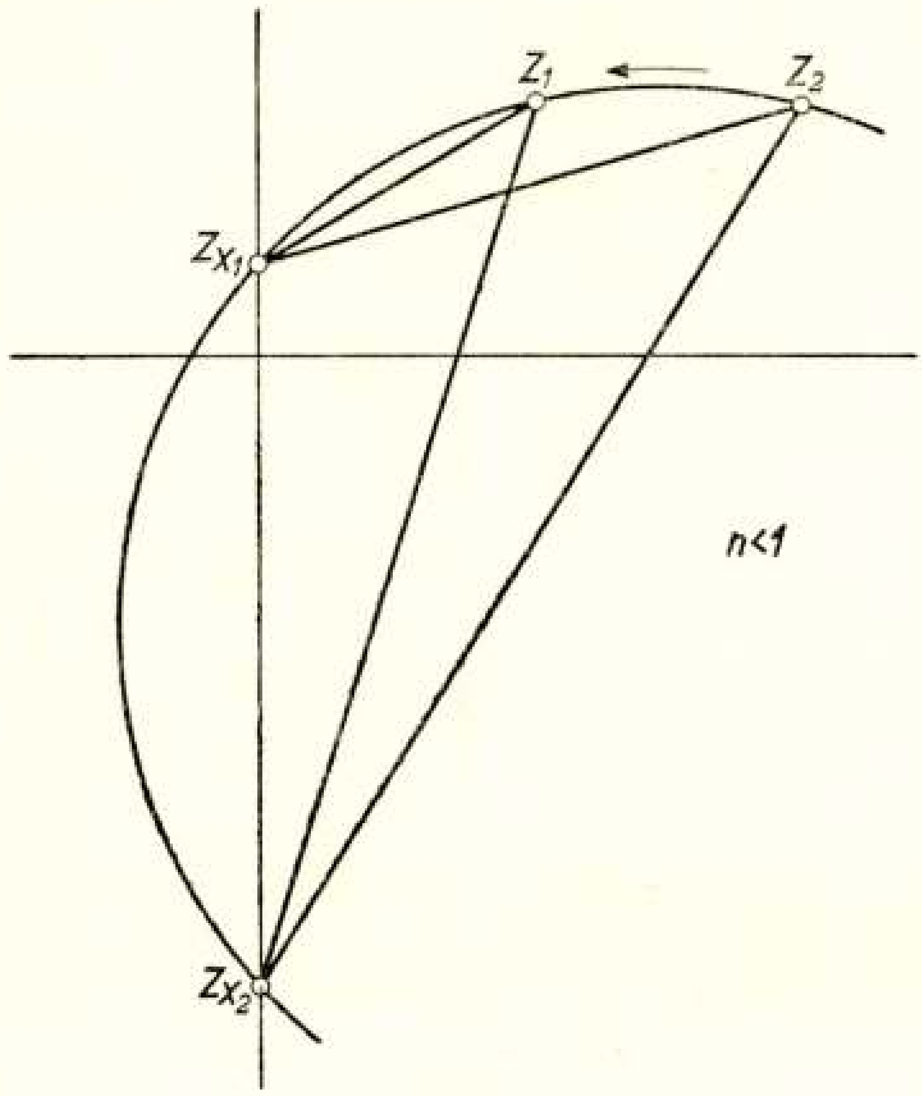
$$q = n^2 \text{ voor } n < 1 \; (Z_{x1} = 0) \text{ en } q = \frac{1}{n^2} \text{ voor } n > 1 \; (Z_{x1} = \infty).$$

IV. *Kabeldiagram.*

Tenslotte behandelen we het geval, dat de vierpool bestaat

uit een stuk ter lengte l van een verliesvrije kabel of een Lechersysteem, waarvan de zelfinductie per lengte-eenheid L_1 en de capaciteit per lengte-eenheid C_1 bedraagt. De golfweerstand van de kabel is dan:

$$g = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \qquad 32)$$



Figuur 7.
Transformatordiagram, analoog aan fig. 6. Alleen hebben we nu een geval van neertransformeeren ($Z_2 > Z_1$).

De vierpoolvergelijkingen kunnen we ontleenen aan de theorie der lange leidingen en deze luiden:

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= \cos\varphi \,.\, E_2 + jg \sin\varphi \,.\, I_2 \\ I_1 &= \frac{j \sin\varphi}{g} \,.\, E_2 + \cos\varphi \,.\, I_2 \end{aligned}\right\} \qquad 33)$$

Hierin heeft φ de waarde $\omega \sqrt{L_1 C_1}\, l$ en de beteekenis van de phasehoek tusschen begin- en eindspanning bij afsluiting door de golfweerstand.

Voor de iteratieve impedanties vinden we $\pm g$. Uit den aard der zaak beteekent dit, dat wanneer we de kabel afsluiten met de negatieve weerstand $-g$, de beginimpedantie eveneens $-g$ wordt.

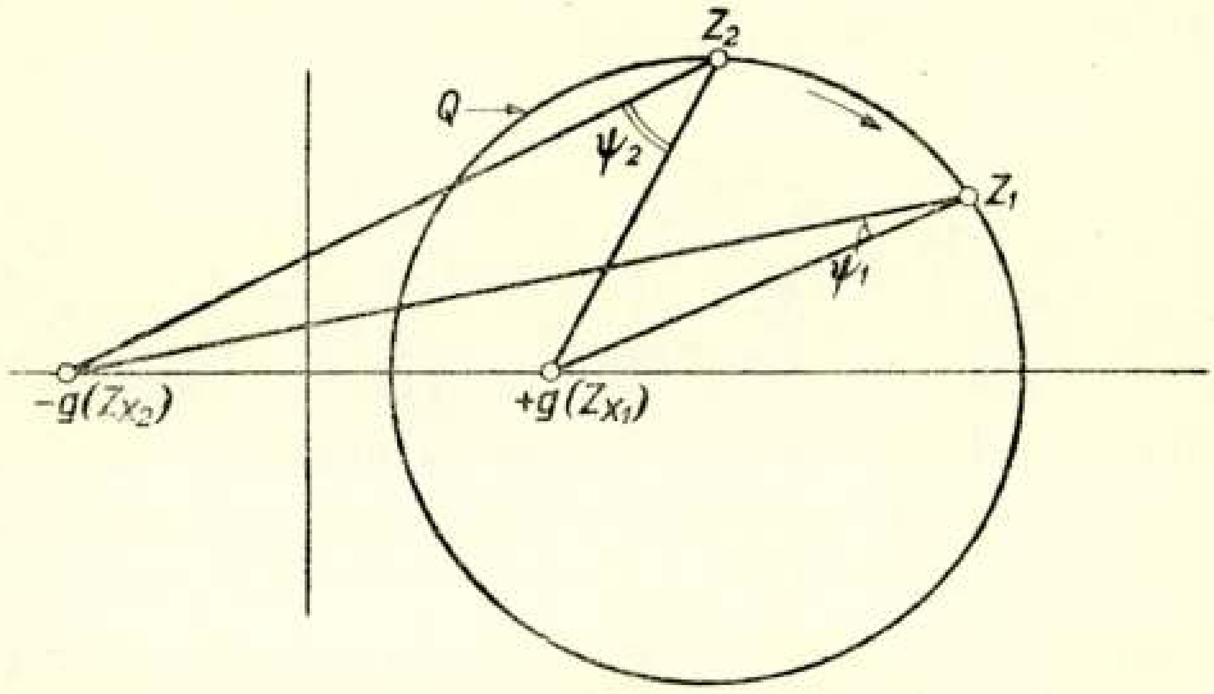
Uit 6) en 13) volgt, wanneer we $Z_{x1} = g$ en $Z_{x2} = -g$ noemen:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \cos\varphi + j\sin\varphi \\ \lambda_2 &= \cos\varphi - j\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad 34)$$

De multiplicator q wordt dus:

$$\left.\begin{aligned} q &= \lambda_2^2 = \cos 2\varphi - j\sin 2\varphi \\ q &= e^{-2j\varphi} \end{aligned}\right\} \quad 35)$$

We vinden een elliptische impedantie-transformatie. Z_2 en Z_1



Figuur 8.

Diagram van kabel of Lechersysteem. De punten $+g$ en $-g$ zijn de positieve en negatieve golfweerstand. Z_2 is de aan het uiteinde aangesloten impedantie. Z_1 is de aan het begin optredende impedantie. Het verschil tusschen de hoeken ψ_2 en ψ_1 is tweemaal de „phasehoek" van de kabel. ($\varphi = 2\pi$ wanneer de kabel een golflengte lang is). De verhouding van de verbindingslijnen van Z_2 en Z_1 met de punten $+g$ en $-g$ is constant. (vgl. fig. 4).

liggen op een cirkel Q (geteekend in fig. 8) met constante verhouding der voerstralen naar de punten $+g$ en $-g$.

Ziet de eindimpedantie Z_2 de punten $\pm g$ onder de hoek ψ_2, dan ziet Z_1 deze punten onder de hoek $\psi_1 = \psi_2 - 2\varphi$, zooals volgt uit 35) en IV). Nu verandert de hoek ψ bij omloopen van de cirkel Q door Z een hoek 2π. (ψ wordt negatief gerekend, wanneer Z in het benedenste halfvlak ligt). Daaruit volgt de bekende eigenschap, dat wanneer de kabel een halve golflengte lang is ($\varphi = \pi$), de ingangsimpedantie Z_1 weer gelijk is

aan de afsluitimpedantie Z_2, een eigenschap, die ook rechtstreeks uit 33) volgt.

Met behulp van het diagram van fig. 8 kunnen allerlei vragen snel beantwoord worden. Een voorbeeld daarvan is b.v. het volgende. We zien, dat het punt Z_1 bij toenemen van de kabellengte de cirkel Q doorloopt in de zin van de wijzers van een uurwerk. Daaruit volgt direct de volgende eigenschap: schakelen we een kort stukje kabel voor een weerstand, kleiner (grooter) dan de golfweerstand van deze kabel, dan krijgt de resulteerende impedantie een inductieve (capacitieve) component, een eigenschap, die anders niet zoo eenvoudig is in te zien.

Maken we de kabel een kwart golflengte lang (of een oneven aantal kwart golflengten), dan wordt in 33) $\cos \varphi = 0$ en we krijgen:

$$Z_1 = \frac{g^2}{Z_2} \qquad 36)$$

Een dergelijke transformatie, die dus een bijzonder geval is van de elliptische, stelt een *inversie* in het complexe vlak voor. Het product van twee inversies met verschillende waarden van g^2 is een ideale transformator. Een ander geval van een inversie doet zich voor bij de besproken low-pass filtercel van fig. 2 en wel voor de frequentie $\omega^2 LC = 2$. We krijgen dan volgens 4):

$$Z_1 = \frac{2L}{C} \cdot \frac{1}{Z_2}$$

In de hoogfrequent-techniek vinden transformaties van het type 36), 37) of soortgelijke verschillende toepassingen.

We besluiten met de opmerking, dat alle besproken gevallen van vierpolen gecompliceerder worden, wanneer we de weerstanden of verliezen in aanmerking gaan nemen. We krijgen dan te maken met loxodromische transformaties. Zijn de weerstanden echter klein, dan wijken deze transformaties slechts weinig af van de besproken elliptische, parabolische en hyperbolische transformaties.

Zoo zal bij het laatste geval van de kabel het punt Z_1 na een „omloop" wat dichter bij het punt Z_{x1}, dat nu geen zuivere weerstand meer is, zijn gekomen. Het punt Z_1 beschrijft dus een spiraal met Z_{x1} als middelpunt.

Eindhoven, 12 Maart 1941.

TIJDSCHRIFT VAN HET NEDERLANDSCH RADIOGENOOTSCHAP
DEEL IX JULI 1942 No. 5

NETWERKSYNTHESE, IN HET BIJZONDER DE SYNTHESE VAN WEERSTANDSLOOZE VIERPOLEN

door

B. D. H. TELLEGEN

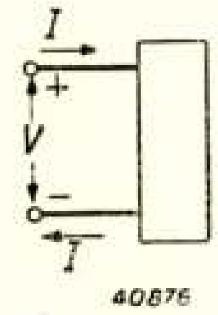
Natuurkundig Laboratorium der N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken, Eindhoven — Holland

Voordracht gehouden voor het Nederlandsch Radiogenootschap op 12 December 1941.

De electrische netwerken, waartoe ook de weerstandslooze vierpolen behooren, waaraan de volgende beschouwingen in het bijzonder gewijd zijn, zijn de systemen opgebouwd uit spoelen, condensatoren en weerstanden. Deze netwerken geven aanleiding tot verschillende problemen. Bevat een bepaald netwerk bijv. een aantal spannings- of stroombronnen, dan kan men vragen naar de grootte van de stroom en de spanning van de verschillende takken van het netwerk. Veranderen de spannings- of stroombronnen sinusvormig met de tijd, dan zullen ook de stroomen en spanningen van de takken tenslotte sinusvormig met de tijd veranderen en kunnen wij deze berekenen met behulp van de bekende complexe wisselstroomrekenwijze. Uit het resultaat van deze berekening kan men vaak die waarden voor de verschillende elementen van het netwerk bepalen, welke voor het bereiken van een bepaald technisch effect zoo gunstig mogelijk zijn. Voor vele technische toepassingen is het netwerk echter niet als gegeven te beschouwen, doch wordt juist gevraagd dit zoodanig te ontwerpen, dat hiermee een bepaald technisch effect zoo goed mogelijk bereikt kan worden. Het deel der netwerktheorie, dat zich hiermee bezig houdt, wordt wel aangeduid met de naam *netwerksynthese* en in de laatste 15 jaar zijn hier een aantal onderzoekingen aan gewijd. Bij deze netwerksynthese is dus het vinden van het netwerk

het doel van het onderzoek, in tegenstelling met de eerstgenoemde onderzoekingen, welke wij met de naam *netwerkanalyse* kunnen aanduiden en waarbij het netwerk als gegeven wordt beschouwd. Wij zullen de netwerksynthese nu nader beschouwen.

Wordt een netwerk voor bepaalde toepassingen gebruikt, dan moet het voorzien zijn van een aantal klemmen, waardoor het met andere deelen van het systeem, waartoe het behoort, kan samenhangen en daarop zijn werking kan uitoefenen. In het eenvoudigste geval heeft het netwerk twee klemmen en wordt het aangeduid met de naam *tweepool*. De stroom, welke bij de éene klem aan het netwerk wordt toegevoerd, is steeds gelijk aan de stroom, welke bij de andere klem wordt afgevoerd. Wij zeggen daarom ook wel, dat het netwerk één klemmenpaar bezit. Tusschen deze stroom I en de spanning V tusschen



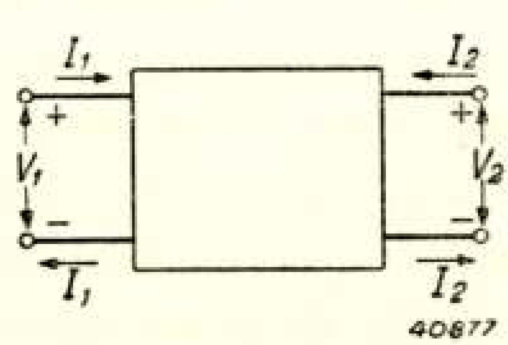
Figuur 1.
Tweepool.

de klemmen (fig. 1) wordt door de tweepool een verband gelegd, dat bijv. in complexe vorm te schrijven is als

$$V = ZI, \qquad (1)$$

waarin Z de impedantie van de tweepool is.

Heeft het netwerk twee klemmenparen en wordt het zoo gebruikt, dat voor elk klemmenpaar de stroom, die bij de éene klem wordt toegevoerd, gelijk is aan de stroom, die bij de andere klem wordt afgevoerd, dan spreekt men van een *vierpool*. Tusschen deze beide stroomen I_1 en I_2 en de spanningen V_1 en V_2 tusschen de klemmen (fig. 2) worden door de vier-



Figuur 2.
Vierpool.

pool twee verbanden gelegd, welke bijv. te schrijven zijn als

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \,, \\ V_2 &= Z_{12} I_1 + Z_{22} I_2 \,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 2)$$

Wegens de *reciprociteits*stelling, welke voor electrische netwerken geldt, is de coëfficiënt van I_2 in de eerste vergelijking gelijk aan de coëfficiënt van I_1 in de tweede vergelijking. De spanning tusschen een klem van het eerste klemmenpaar en een klem van het tweede klemmenpaar wordt gewoonlijk buiten beschouwing gelaten, zoodat dus twee vierpolen als gelijkwaardig worden beschouwd, indien hun vergelijkingen 2) dezelfde zijn, ook al zijn hierbij de laatstgenoemde spanningen verschillend.

Men kan zoo doorgaan en systemen met n klemmenparen beschouwen, welke *2n-polen* genoemd worden. Andere systemen behoeven niet beschouwd te worden, bijv. kan een systeem met 3 klemmen steeds opgevat worden als een vierpool, waarvan twee klemmen samenvallen.

Wij zullen alleen *passieve* netwerken beschouwen; dat zijn netwerken, welke geen energiebronnen bevatten en waarin dus alle weerstanden, capaciteiten en zelfinducties positief zijn.

Tweepolen.

Alvorens de vierpolen nader te beschouwen willen wij eerst eenige eigenschappen van de tweepolen in herinnering brengen. Beginnen wij met de tweepool te beschouwen bij één frequentie. De impedantie Z van de tweepool bestaat uit een reëel en een imaginair deel, zoodat wij kunnen schrijven $Z = R + jX$. Daar wij ons tot passieve systemen beperken, zal R nooit negatief zijn, $R \geq o$, terwijl X zoowel positief als negatief kan zijn. De synthese is in dit geval zeer eenvoudig. Is Z gegeven, dan is de tweepool te realiseeren door een weerstand met een zelfinductie of een capaciteit in serie. Wij kunnen de tweepool echter nog op vele andere wijzen realiseeren, bijv. door een weerstand met een zelfinductie of een capaciteit parallel. Dit is een voorbeeld van een algemeene eigenschap van de netwerksynthese. *Is een netwerk gegeven, dan zijn zijn vergelijkingen eenduidig bepaald, zijn echter de vergelijkingen gegeven, dan zijn hierbij nog vele netwerken mogelijk.* Dit maakt, dat wij, als een netwerk met bepaalde eigenschappen gezocht wordt, het beste eerst naar

de vergelijkingen van het gezochte netwerk kunnen vragen om daarna hierbij een netwerk te zoeken, daar het aantal mogelijke vergelijkingen geringer is dan het aantal mogelijke netwerken.

Beschouwen wij nu de eigenschappen van een tweepool bij verschillende frequenties. De impedantie heeft als functie van de frequentie steeds de gedaante

$$Z = \frac{a_o p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots\ldots + a_n}{b_o p^n + b_1 p^{n-1} + \ldots\ldots + b_n}, \quad \ldots\ldots \quad 3)$$

waarin $p = j\omega$, als ω de hoekfrequentie is, en de a's en b's alle reëel zijn. Het getal n noemen wij de *orde* van de tweepool, daar dit gelijk is aan de orde van de differentiaalvergelijking van de vrije trillingen van het systeem, dat ontstaat door de tweepool over een willekeurige weerstand te sluiten. Om dit in te zien bedenken wij, dat 3) ontstaan is uit de differentiaalvergelijking tusschen de stroom i en de spanning v van de tweepool door daarin d/dt te vervangen door p. Gaan wij weer naar de differentiaalvergelijking terug, dan kunnen wij i. p. v. 3) schrijven

$$\left(b_o \frac{d^n}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \ldots + b_n\right) v = \left(a_o \frac{d^n}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n\right) i. \quad 4)$$

Sluiten wij de tweepool over een weerstand r, dan is ook

$$v = -ri. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

Het minteeken hierin wordt veroorzaakt, doordat wij v en i in zoodanige richtingen positief hebben gerekend t.o.v. de tweepool, als in fig. 1 is aangegeven. Door tusschen 4) en 5) v of i te elimineeren komen wij tot eenzelfde differentiaalvergelijking, welke de differentiaalvergelijking van de vrije trillingen van het systeem wordt genoemd. Deze luidt

$$(b_o r + a_o) \frac{d^n}{dt^n} + (b_1 r + a_1) \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \ldots + b_n r + a_n = o. \quad 6)$$

De orde van deze differentiaalvergelijking bedraagt inderdaad n. Met $r = o$ is dit de differentiaalvergelijking van de kortgesloten tweepool, welke wij dus krijgen door de teller van Z gelijk aan nul te stellen, met $r = \infty$ is dit de vergelijking van

de open tweepool, welke wij krijgen door de noemer van Z nul te stellen.

De orde van een tweepool is een maatstaf voor zijn ingewikkeldheid. Gaan wij nl. de vrije trillingen van de over een weerstand gesloten tweepool bepalen door vergelijking 6) op te lossen, dan vinden wij een oplossing, welke n integratieconstanten bevat, zoodat de aanvangstoestand van het systeem door n onafhankelijke gegevens moet worden gekenmerkt om deze integratieconstanten te kunnen bepalen. Deze aanvangstoestand wordt gekenmerkt door de verdeeling van de electrische en de magnetische energie ten tijde $t = o$, dus door de spanningen op de condensatoren en de stroomen door de spoelen. De orde van een tweepool kan dus niet hooger zijn dan de som van het aantal in de tweepool voorkomende condensatoren en spoelen. De orde kan wel lager zijn dan deze som, daar de spanningen op de condensatoren en de stroomen door de spoelen niet alle onafhankelijk van elkaar behoeven te zijn. Bevat het netwerk bijv. drie in ster geschakelde spoelen, dan verhoogen deze de orde slechts met twee, daar, als de stroom door twee van de spoelen gegeven is, de stroom door de derde spoel hierdoor tevens is bepaald. De orde is dus gelijk aan het aantal onafhankelijke gegevens, dat noodig is om de verdeeling van de energie in de aanvangstoestand te bepalen.

Wij kunnen ons nu de vraag stellen van een gegeven $Z = f(p)$ van de gedaante 3) uit te maken of dit de impedantie van een tweepool kan voorstellen en zoo ja één of meer netwerken aan te geven, waarmee deze tweepool gerealiseerd kan worden. Voor weerstandslooze tweepolen is deze vraag beantwoord door Foster (5) [1]. Deze kwam tot het volgende resultaat. Voor weerstandslooze tweepolen is Z imaginair en kunnen wij twee gevallen onderscheiden. Of de teller bevat alleen termen van oneven graad in p en de noemer alleen termen van even graad in p óf omgekeerd. In deze gevallen heeft Z de vorm

$$Z = P \frac{p\,(p^2 + \omega_b^2) \ldots}{(p^2 + \omega_a^2)\,(p^2 + \omega_c^2) \ldots}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$

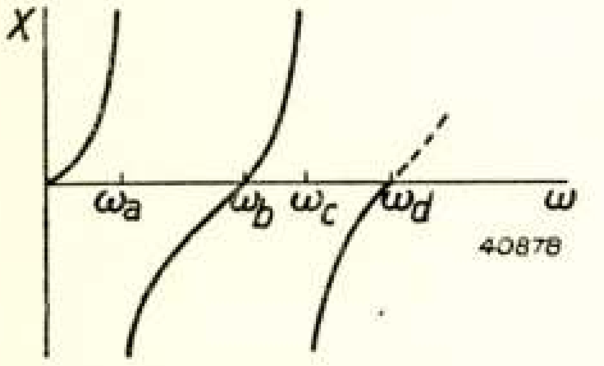
resp.

$$Z = P \frac{(p^2 + \omega_a^2)\,(p^2 + \omega_c^2) \ldots}{p\,(p^2 + \omega_b^2) \ldots}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$

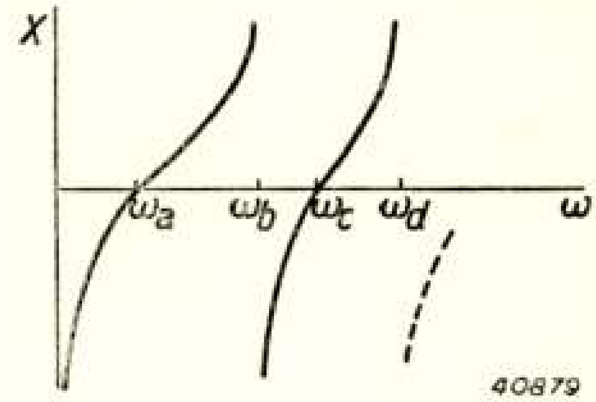
[1]) De nummers tusschen haakjes verwijzen naar de literatuuropgaven aan het einde van het artikel.

waarin $P \geqq o$ en $o < \omega_a^2 < \omega_b^2 < \omega_c^2 \ldots$ . . . . 9)

Bij de frequenties $o, \omega_a, \omega_b, \omega_c, \ldots, \infty$ wordt Z achtereenvolgens nul en oneindig of omgekeerd. Stellen wij $Z = jX$, dan wordt X als functie van ω dus voorgesteld door een kromme van de gedaante van fig. 3 of fig. 4. De resonantiefrequenties, waarbij Z nul of oneindig wordt, wisselen elkaar telkens af, terwijl $dX/d\omega$ steeds positief is.



Figuur 3.
Reactantie van een weerstandslooze tweepool als functie van de frequentie.

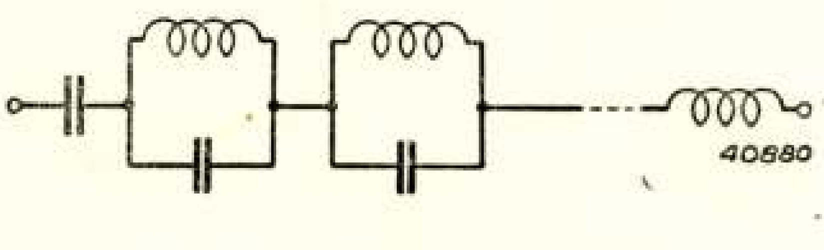


Figuur 4.
Andere vorm van de reactantie van een weerstandslooze tweepool als functie van de frequentie.

Om aan te toonen, dat bovenstaande voorwaarden voor Z voor de realiseerbaarheid ook voldoende zijn, wordt Z gesplitst in partieele breuken. In plaats van 7) en 8) krijgen wij dan

$$Z = a_0 \cdot \frac{1}{p} + a_1 \frac{p}{p^2 + \omega_1^2} + a_2 \frac{p}{p^2 + \omega_2^2} + \ldots + a_n p, \quad . \quad . \quad 10)$$

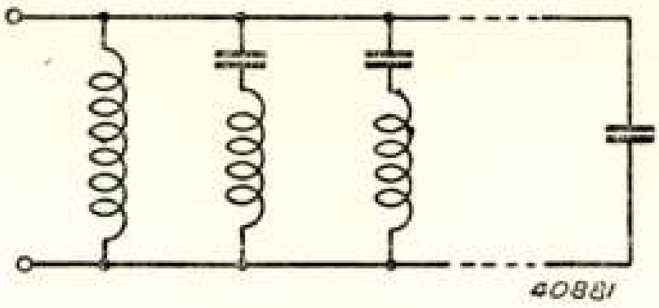
waarin a_0 of a_n of beide nul kunnen zijn. Uit 9) is af te leiden, dat geen der a's negatief kan zijn. De eerste term van 10) is te realiseeren door een capaciteit, de tweede term door een capaciteit en een zelfinductie parallel, welke resoneeren bij de frequentie ω_1 en overeenkomstig voor de volgende termen, terwijl de laatste term te realiseeren is door een zelfinductie. Wij komen dus tot het schema van fig. 5, waarin voor bepaalde gevallen de enkele capaciteit of de enkele zelfinductie of beide



Figuur 5.
Synthese van een weerstandslooze tweepool.

kunnen ontbreken. Behalve deze schakeling zijn natuurlijk nog vele andere schakelingen mogelijk om de tweepool te realiseeren en wel des te meer naarmate de orde van de tweepool hooger

is (2). Bijv. kunnen wij ook de t.o.v. fig. 5 duale schakeling gebruiken, welke in fig. 6 is geteekend. In deze schakelingen is de som van het aantal capaciteiten en zelfinducties gelijk aan



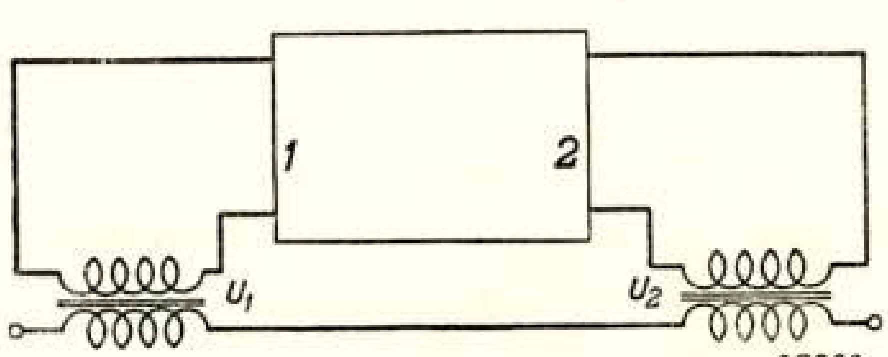
Figuur 6.
Een andere vorm der synthese van een weerstandslooze tweepool.

de orde van de tweepool, terwijl het verschil nul of één bedraagt. Voor het vinden van andere schakelingen kunnen wij met voordeel uitgaan van de meetkundige configuraties der netwerken, welke vroeger in dit tijdschrift werden besproken (9).

Bevat de tweepool wel weerstanden, dan is zijn synthese minder eenvoudig. Deze is onderzocht door Brune (1), doch wij zullen hier niet op ingaan.

Vierpolen.

Wij zullen nu onze aandacht aan de vierpool wijden. Zijn vergelijkingen van de vorm 2) gegeven, dan kunnen wij vragen naar de voorwaarden, waaraan Z_{11}, Z_{22} en Z_{12} moeten voldoen, opdat deze vergelijkingen de vergelijkingen van een vierpool kunnen voorstellen, en, indien hieraan is voldaan, één of meer netwerken aan te geven om de vierpool te realiseeren. Wij kunnen dit vierpoolprobleem tot het overeenkomstige tweepoolprobleem terugbrengen door uit de vierpool met behulp van twee ideale transformatoren een tweepool te construeeren op



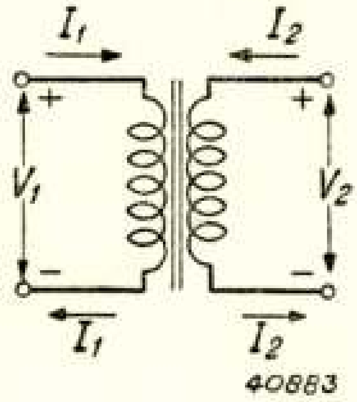
Figuur 7.
Tweepool opgebouwd uit een vierpool en twee ideale transformatoren.

de wijze, zooals dit in fig. 7 is aangegeven. Met *ideale transformator* wordt aangeduid een transformator zonder verliezen,

zonder spreiding en zonder magnetiseeringsstroom, dus met oneindig groote zelfinducties van de beide wikkelingen. Uit deze definitie volgt, dat een ideale transformator zuiver stroomen en spanningen transformeert en dat zijn eigenschappen dus worden uitgedrukt door de vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= u\,V_2, \\ I_2 &= -u\,I_1, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 11)$$

waarin u de transformatieverhouding is (fig. 8). Hoewel een ideale transformator niet te realiseeren doch slechts te benaderen is, is het toch het aangewezen element voor algemeene



Figuur 8.
Ideale transformator.

beschouwingen over netwerken, wat het trouwens gemeen heeft met de zelfinductie, welke een ideale spoel is, nl. verliesvrij en zonder capaciteit, en de capaciteit, welke een ideale condensator is, nl. verliesvrij en zonder zelfinductie.

Om de impedantie Z van fig. 7 te bepalen sturen wij een stroom I erdoor. Aan de vierpool worden dan toegevoerd de stroomen $u_1 I$ en $u_2 I$, zoodat volgens 2) de spanningen op de vierpool worden $(u_1 Z_{11} + u_2 Z_{12}) I$ en $(u_1 Z_{12} + u_2 Z_{22}) I$ en dus de spanning op de impedantie wordt $u_1 (u_1 Z_{11} + u_2 Z_{12}) I + u_2 (u_1 Z_{12} + u_2 Z_{22}) I$. De impedantie bedraagt dus

$$Z = u_1^2 Z_{11} + 2\,u_1 u_2 Z_{12} + u_2^2 Z_{22}. \quad \ldots\ldots \quad 12)$$

Daar wij u_1 en u_2 geheel willekeurig kunnen kiezen, komen wij dus tot de noodige voorwaarde voor Z_{11}, Z_{22} en Z_{12}, dat de uitdrukking 12) de impedantie van een tweepool moet kunnen voorstellen voor alle waarden van u_1 en u_2.

Beschouwen wij de vierpool eerst weer bij één frequentie (10,8), dan kunnen wij stellen

$$Z_{11} = R_{11} + jX_{11},\ Z_{22} = R_{22} + jX_{22},\ Z_{12} = R_{12} + jX_{12},$$

waardoor Z wordt

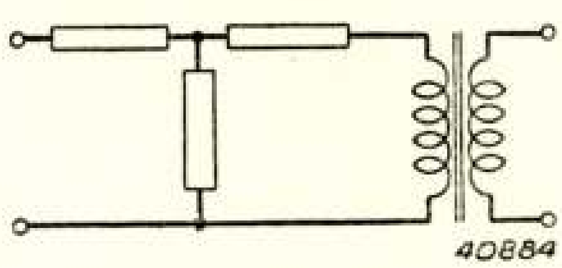
$$Z = u_1^2 R_{11} + 2\,u_1 u_2 R_{12} + u_2^2 R_{22} + j\,(u_1^2 X_{11} + 2\,u_1 u_2 X_{12} + u_2^2 X_{22}). \quad \ldots\ldots \quad 13)$$

Daar het reëele deel van Z nooit negatief kan zijn, moeten wij dus de voorwaarden bepalen, waardoor $u_1^2 R_{11} + 2\,u_1 u_2 R_{12} + u_2^2 R_{22} \geqq 0$ wordt voor alle waarden van u_1 en u_2. Dit is een zoogenaamde kwadratische vorm in u_1 en u_2 en de gezochte voorwaarden luiden

$$R_{11} \geqq 0,\ R_{22} \geqq 0 \text{ en } R_{11} R_{22} - R_{12}^2 \geqq 0, \quad . \; . \; . \quad 14)$$

zooals gemakkelijk is aan te toonen.

Dat de voorwaarden 14) ook voldoende zijn, volgt uit het feit, dat men iedere vierpool, welke aan 14) voldoet, kan realiseeren, bijv. met behulp van drie impedanties met een positief reëel deel in T of in π geschakeld in cascade met een ideale transformator, zooals in fig. 9 is aangegeven.



Figuur 9.
Synthese van een vierpool voor één frequentie.

Beschouwen wij nu de eigenschappen van de vierpool bij verschillende frequenties. Z_{11}, Z_{22} en Z_{12} zullen alle de gedaante hebben van 3), waarbij de drie noemers in het algemeen aan elkaar gelijk zullen zijn, de tellers echter verschillend. Deze gelijkheid van de noemers is in te zien door te denken aan de wijze, waarop voor een gegeven vierpoolnetwerk de vergelijkingen kunnen worden berekend. Door toepassing van de wetten van Kirchhoff ontstaan een aantal lineaire vergelijkingen in de stroomen en spanningen, welke bij oplossing aanleiding geven tot een gemeenschappelijke noemerdeterminant voor Z_{11}, Z_{22} en Z_{12}. Voor weerstandslooze vierpolen (3, 7) worden de Z's alle imaginair en zijn weer te splitsen in partieele breuken, zoodat wij ze kunnen brengen in de vorm

$$\left.\begin{aligned} Z_{11} &= a_0 \cdot \frac{1}{p} + a_1 \frac{p}{p^2 + \omega_1^2} + \ldots\ldots + a_n p, \\ Z_{12} &= h_0 \cdot \frac{1}{p} + h_1 \frac{p}{p^2 + \omega_1^2} + \ldots\ldots + h_n p, \\ Z_{22} &= b_0 \cdot \frac{1}{p} + b_1 \frac{p}{p^2 + \omega_1^2} + \ldots\ldots + b_n p. \end{aligned}\right\} \quad . \quad 15)$$

Hiermee wordt 12)

$$Z = (u_1^2 a_0 + 2\, u_1 u_2 h_0 + u_2^2 b_0)\frac{1}{p} + (u_1^2 a_1 + 2\, u_1 u_2 h_1 +$$

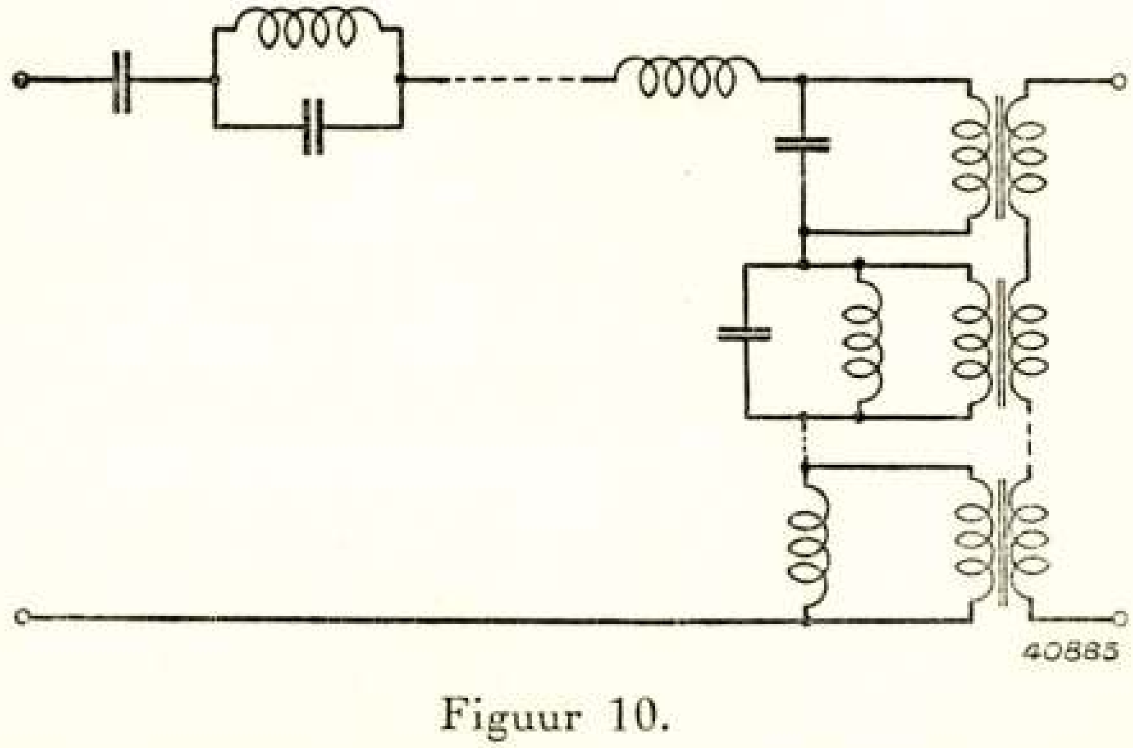
$$+ u_2^2 b_1)\,\frac{p}{p^2 + \omega_1^2} + \ldots\ldots + (u_1^2 a_n + 2u_1 u_2 h_n + u_2^2 b_n)p\,. \qquad 16)$$

Daar dit een weerstandslooze impedantie moet kunnen voorstellen, mag, zooals wij boven zagen, geen der coëfficiënten negatief zijn, en daar dit het geval moet zijn voor alle waarden van u_1 en u_2 volgen hieruit de voorwaarden

$$a_k \geqq o,\, b_k \geqq o \text{ en } a_k b_k - h_k^2 \geqq o \text{ voor } k \text{ van nul tot } n, \qquad 17)$$

analoog aan 14).

Dat deze voorwaarden ook voldoende zijn, volgt uit het feit, dat men iedere vierpool, welke hieraan voldoet, kan realiseeren. Daartoe splitsen wij bijv. Z_{11} in twee deelen Z'_{11} en Z''_{11} met coëfficiënten $a'_k = a_k - h_k^2/b_k$ en $a''_k = h_k^2/b_k$, welke volgens 17) geen van beide negatief zijn. Het deel Z'_{11} is afzonderlijk te realiseeren en op te vatten als een impedantie in serie met het klemmenpaar *1* van de vierpool. Het deel Z''_{11} vormt met Z_{12} en Z_{22} een vierpool, welke op te vatten is als de serieschakeling van een aantal sterk gekoppelde deelvierpolen. De drie eerste termen a''_0/p, h_0/p en b_0/p kunnen, daar $a''_0 b_0 - h_0^2 = o$, nl. gerealiseerd worden door een ideale transformator met een capaciteit parallel aan één van de wikkelingen en iets overeenkomstigs geldt voor de andere termen, zoodat wij tenslotte voor de geheele vierpool komen tot de schakeling van fig. 10.



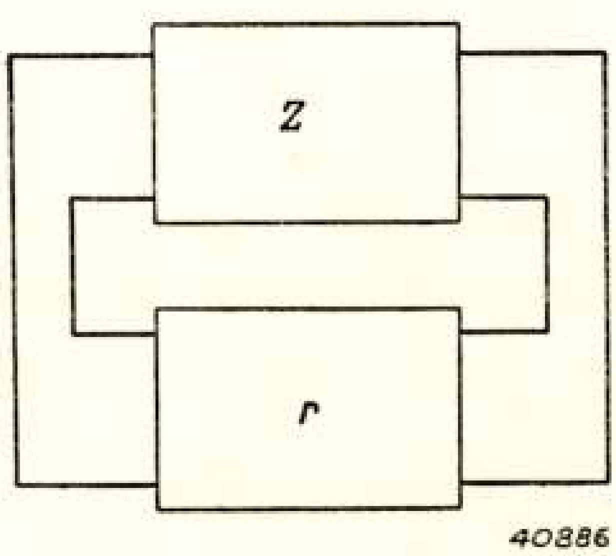
Figuur 10.
Synthese van een weerstandslooze vierpool.

Het probleem van de weerstandslooze vierpool is hiermee tot op zekere hoogte opgelost. Wij vonden, dat de vierpool-

grootheden de vorm hebben van 15), dat de coëfficiënten hiervan aan de voorwaarden 17) voldoen en dat de vierpool gerealiseerd kan worden volgens fig. 10. Toch zijn wij hier nog niet mee voldaan. Wanneer voor een bepaalde toepassing nl. gevraagd wordt een vierpool te construeeren, die bepaalde eigenschappen heeft, zijn als regel ook de vergelijkingen van deze vierpool niet als gegeven te beschouwen, doch moeten wij deze eerst nog opstellen. Nu zal het in het algemeen zoo zijn, dat wij des te beter aan bepaalde eischen kunnen voldoen, naarmate wij toestaan de vierpool ingewikkelder te maken. Wij hebben dus een indeeling van de vierpolen naar de graad van ingewikkeldheid noodig en hiertoe kunnen wij komen door het begrip *orde*, dat wij bij tweepolen bespraken, uit te breiden tot vierpolen. Daartoe sluiten wij de vierpool Z, waarvan de vergelijkingen zijn

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 , \\ V_2 &= Z_{12} I_1 + Z_{22} I_2 , \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 18)$$

op de wijze, zooals in fig. 11 is aangegeven, over een vierpool



Figuur 11.
De vierpool Z gesloten over een vierpool r uit weerstanden.

r uit weerstanden, waarvan de vergelijkingen zijn

$$\left.\begin{aligned} -V_1 &= r_{11} I_1 + r_{12} I_2 , \\ -V_2 &= r_{12} I_1 + r_{22} I_2 . \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 19)$$

Het minteeken wordt veroorzaakt, doordat wij de V's en I's in zoodanige richtingen positief hebben gerekend t.o.v. de oorspronkelijke vierpool, als in fig. 2 is aangegeven. De orde van de differentiaalvergelijking van de vrije trillingen van het zoo

ontstane systeem noemen wij dan de orde van de vierpool. Door tusschen 18) en 19) V_1, V_2 en I_1 of I_2 te elimineeren komen wij tot

$$(Z_{11} + r_{11})\,(Z_{22} + r_{22}) - (Z_{12} + r_{12})^2 = 0 \text{ of}$$

$$Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2 + r_{22}Z_{11} + r_{11}Z_{22} - 2r_{12}Z_{12} + r_{11}r_{22} - r_{12}^2 = 0. \quad 20)$$

Om hieruit tot de differentiaalvergelijking voor de vrije trillingen te komen brengen wij $Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2$, Z_{11}, Z_{22} en Z_{12} alle op dezelfde noemer en stellen bijv.

$$Z_{11} = \frac{A}{C},\ Z_{22} = \frac{B}{C},\ Z_{12} = \frac{H}{C},\ Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2 = \frac{D}{C}. \quad . \quad . \quad 21)$$

A, B, C, D en H zijn dus polynomen in p, waartusschen de betrekking bestaat

$$AB - H^2 = CD\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 22)$$

Door 21) in 20) te substitueeren, met C te vermenigvuldigen en p door d/dt te vervangen ontstaat de differentiaalvergelijking van de vrije trillingen. De orde van de vierpool is dus gelijk aan de hoogste graad in p van A, B, C, D en H. Voor vierpolen geldt evenals voor tweepolen, dat de orde niet hooger kan zijn dan de som van het aantal in de vierpool voorkomende condensatoren en spoelen, in bepaalde gevallen echter wel lager.

Wij zullen nu onderzoeken, welke weerstandslooze vierpolen van een bepaalde orde mogelijk zijn, beginnend bij de nulde orde, daarna eerste orde, tweede orde, enz. Daarbij zullen wij gebruik maken van de volgende eigenschappen. Uit het weerstandsloos zijn van een vierpool volgt, dat elk van de grootheden A, B, C, D en H òf alleen termen van even graad òf alleen termen van oneven graad in p bevat. Daar Z_{11}, Z_{22} en Z_{12} in dit geval alle imaginair zijn, kunnen wij twee gevallen onderscheiden, nl. òf A, B en H van even graad in p en C en D van oneven graad òf omgekeerd. Voor de nulde orde wil dit zeggen òf A, B en H van de nulde graad, dus constant, en C en D nul òf omgekeerd. Verder moeten wij letten op het verband 22), dat tusschen de grootheden bestaat. Wij zullen beginnen hiermee de nulde orde vierpolen te onderzoeken.

Nulde orde.

a) A, B en H constant, C en D nul. Uit 22) volgt $AB - H^2 = o$. Om te zien, wat dit voorstelt, zetten wij 21) in 18), waardoor wij krijgen

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \frac{A}{C} I_1 + \frac{H}{C} I_2 , \\ V_2 &= \frac{H}{C} I_1 + \frac{B}{C} I_2 . \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; 23)$$

Wij brengen dit nog in een andere vorm door V_1 en I_2 uit te drukken in I_1 en V_2, waardoor wij met 22) krijgen

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \frac{D}{B} I_1 + \frac{H}{B} V_2 , \\ I_2 &= -\frac{H}{B} I_1 + \frac{C}{B} V_2 . \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; 24)$$

Stellen wij hierin C en D gelijk nul en H en B constant, dan zien wij, dat de vergelijkingen overeenkomen met de vergelijkingen 11) van een ideale transformator.

b) A, B en H nul, C en D constant. Uit 22) volgt nu $CD = o$, dus òf $C = o$ òf $D = o$.

b_1) A, B, C, H nul, D constant. Om te zien, wat dit voorstelt, vormen wij 23) om door I_1 en I_2 in V_1 en V_2 uit te drukken. Wij vinden dan

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \frac{B}{D} V_1 - \frac{H}{D} V_2 , \\ I_2 &= -\frac{H}{D} V_1 + \frac{A}{D} V_2 . \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; 25)$$

Met A, B en H nul en D constant leidt dit tot $I_1 = o$ en $I_2 = o$, zoodat de vierpool in dit geval bestaat uit twee open klemmenparen.

b_2) A, B, D, H nul, C constant. Dit in 23) gezet leidt tot $V_1 = o$ en $V_2 = o$, zoodat de vierpool in dit geval bestaat uit twee kortgesloten klemmenparen.

Eerste orde.

a) A, B en H eerste graad, C en D constant. Wij stellen dus $A = ap$, $B = bp$, $H = hp$, $C = c$, $D = d$. Dan moet volgens 22) $abp^2 - h^2p^2 = cd$ voor alle waarden van p, dus $ab - h^2 = o$ en $cd = o$, dus òf $c = o$ òf $d = o$.

a_1) $ab - h^2 = o$, $c = o$. Dit in 24) gezet leidt tot

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \frac{d}{bp} I_1 + \frac{h}{b} V_2 , \\ I_2 &= -\frac{h}{b} I_1 \quad . \end{aligned}\right\}$$

Dit zijn de vergelijkingen van een vierpool bestaande uit een ideale transformator met een capaciteit in serie met één van de wikkelingen.

a_2) $ab - h^2 = o$, $d = o$. Dit in 24) gezet leidt tot

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \frac{h}{b} V_2 , \\ I_2 &= -\frac{h}{b} I_1 + \frac{c}{bp} V_2 . \end{aligned}\right\}$$

Dit is een ideale transformator met een zelfinductie parallel aan één van de wikkelingen.

b) A, B en H constant, C en D eerste graad. Wij stellen $A = a$, $B = b$, $H = h$, $C = cp$, $D = dp$. Nu moet $ab - h^2 = cdp^2$ voor iedere p, dus $ab - h^2 = o$ en $cd = o$, dus òf $c = o$ òf $d = o$.

b_1) $ab - h^2 = o$, $c = o$. Dit in 24) leidt tot

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \frac{dp}{b} I_1 + \frac{h}{b} V_2 , \\ I_2 &= -\frac{h}{b} I_1 \quad . \end{aligned}\right\}$$

Dit is een ideale transformator met een zelfinductie in serie met één van de wikkelingen.

b_2) $ab - h^2 = o$, $d = o$. Dit in 24) leidt tot

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \frac{h}{b} V_2, \\ I_2 &= -\frac{h}{b} I_1 + \frac{cp}{b} V_2. \end{aligned}\right\}$$

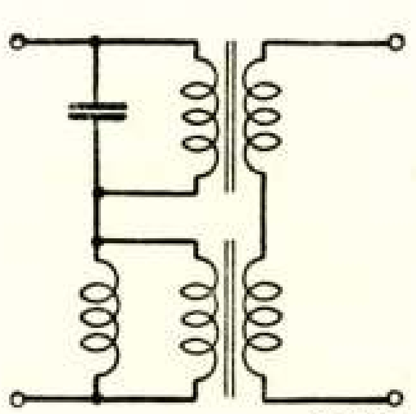
Dit is een ideale transformator met een capaciteit parallel aan één van de wikkelingen.

Tweede orde.

a) A, B en H tweede graad, C en D eerste graad. Wij stellen $A = a_0 p^2 + a_1$, $B = b_0 p^2 + b_1$, $H = h_0 p^2 + h_1$, $C = cp$, $D = dp$. Dan moet $(a_0 p^2 + a_1)(b_0 p^2 + b_1) - (h_0 p^2 + h_1)^2 = cdp^2$ voor iedere p, dus $a_0 b_0 - h_0^2 = 0, a_0 b_1 + a_1 b_0 - 2h_0 h_1 = cd$ en $a_1 b_1 - h_1^2 = 0$. Dit in 23) gezet leidt tot

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \frac{a_0 p^2 + a_1}{cp} I_1 + \frac{\pm\sqrt{a_0 b_0}\, p^2 \pm \sqrt{a_1 b_1}}{cp} I_2, \\ V_2 &= \frac{\pm\sqrt{a_0 b_0}\, p^2 \pm \sqrt{a_1 b_1}}{cp} I_1 + \frac{b_0 p^2 + b_1}{cp} I_2. \end{aligned}\right\}$$

Dit is te realiseeren met de schakeling van fig. 12, bestaan-



Figuur 12.
Een weerstandslooze vierpool van de tweede orde.

de uit een capaciteit, een zelfinductie en twee ideale transformatoren.

b) A, B en H eerste graad, C en D tweede graad. Wij stellen $A = ap$, $B = bp$, $H = hp$, $C = c_0 p^2 + c_1$, $D = d_0 p^2 + d_1$. Dan moet $ab p^2 - h^2 p^2 = (c_0 p^2 + c_1)(d_0 p^2 + d_1)$ voor iedere p, dus $c_0 d_0 = 0$, $ab - h^2 = c_0 d_1 + c_1 d_0$, $c_1 d_1 = 0$. Dit valt uiteen in vier gevallen: òf $c_0 = 0$, $c_1 = 0$ òf $d_0 = 0$, $d_1 = 0$ òf $c_0 = 0$, $d_1 = 0$ òf $d_0 = 0$, $c_1 = 0$.

b_1) $ab - h^2 = 0$, $c_0 = 0$, $c_1 = 0$. Dit in 24) gezet leidt tot

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{d_0 p^2 + d_1}{bp} I_1 + \frac{h}{b} V_2 , \\ I_2 &= -\frac{h}{b} I_1 . \end{aligned} \right\}$$

Dit is een ideale transformator met een capaciteit en een zelfinductie in serie met één van de wikkelingen.

b_2) $ab - h^2 = 0$, $d_0 = 0$, $d_1 = 0$. Dit in 24) leidt tot

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{h}{b} V_2 , \\ I_2 &= -\frac{h}{b} I_1 + \frac{c_0 p^2 + c_1}{bp} V_2 . \end{aligned} \right\}$$

Dit is een ideale transformator met een capaciteit en een zelfinductie parallel aan één van de wikkelingen.

b_3) $ab - h^2 = c_1 d_0$, $c_0 = 0$, $d_1 = 0$. Dit in 24) leidt tot

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{d_0 p}{b} I_1 + \frac{h}{b} V_2 , \\ I_2 &= -\frac{h}{b} I_1 + \frac{c_1}{bp} V_2 . \end{aligned} \right\}$$

Dit is een ideale transformator met een zelfinductie parallel en een zelfinductie in serie met één van de wikkelingen.

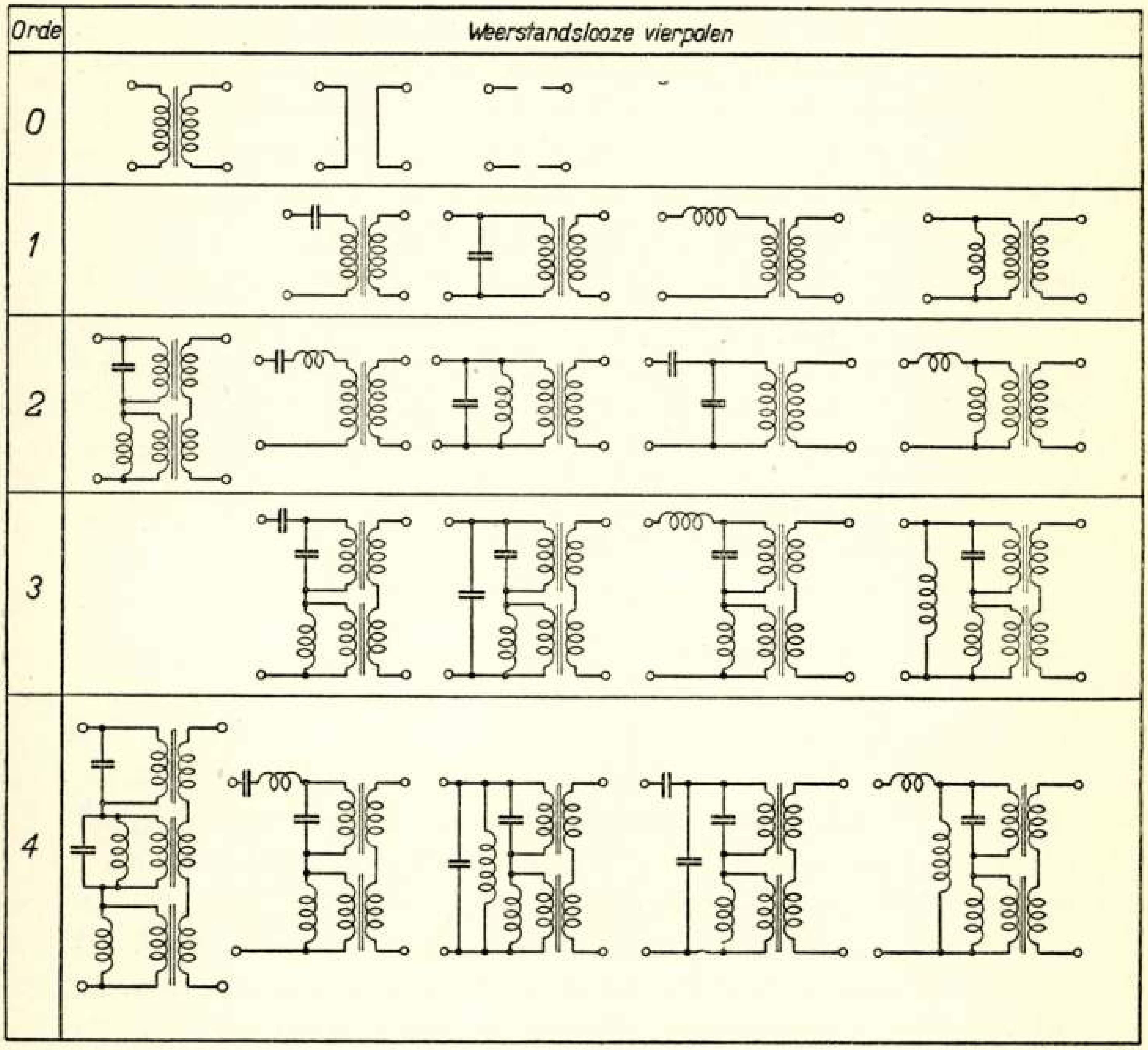
b_4) $ab - h^2 = c\, d_1$, $d_0 = 0$, $c_1 = 0$. Dit in 24) leidt tot

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{d_1}{bp} I_1 + \frac{h}{b} V_2 , \\ I_2 &= -\frac{h}{b} I_1 + \frac{c_0 p}{b} V_2 . \end{aligned} \right\}$$

Dit is een ideale transformator met een capaciteit parallel en een capaciteit in serie met één van de wikkelingen.

Hoogere orde.

Wij kunnen op ongeveer gelijksoortige wijze ook de vierpolen van hoogere orde onderzoeken, welk onderzoek wij in een aanhangsel zullen laten volgen. Het resultaat hiervan is weergegeven in fig. 13, waarin de vierpolen van de nulde tot de



Figuur 13.
De weerstandslooze vierpolen van de nulde tot de vierde orde.

vierde orde zijn geteekend. Uit deze figuur is eenvoudig te zien, hoe deze tot hoogere orde kan worden uitgebreid. Wij zien, dat er, de nulde orde uitgezonderd, 5 soorten vierpolen van even orde en 4 soorten van oneven orde bestaan. Eén van de vierpolen van even orde bevat geen capaciteit of zelfinductie parallel of in serie met de klemmen. Deze vierpolen zijn als de grondtypen te beschouwen, waaruit de andere kunnen worden

afgeleid. De vierpolen van oneven orde ontstaan nl. uit het grondtype van een orde lager door een capaciteit of een zelfinductie parallel of in serie met de klemmen te schakelen. Vier van de vierpolen van even orde ontstaan uit het grondtype van twee orden lager door òf een capaciteit en een zelfinductie in serie òf een capaciteit en een zelfinductie parallel òf een capaciteit parallel en een capaciteit in serie òf een zelfinductie parallel en een zelfinductie in serie met de klemmen te schakelen. Bij de geteekende schakelingen is de som van het aantal capaciteiten en zelfinducties gelijk aan de orde van de vierpool, terwijl het verschil bij oneven orde één en bij even orde nul of twee bedraagt. Behalve de geteekende schakelingen zijn ook hier vele andere schakelingen van dezelfde orde mogelijk. Deze zullen echter alle vergelijkingen hebben, welke overeenkomen met, of bijzondere gevallen zijn van de vergelijkingen van de in fig. 13 geteekende schakelingen. Bijv. kunnen wij elke schakeling van derde of hoogere orde uit fig. 13, welke een capaciteit en/of zelfinductie parallel aan de klemmen bevat, vervangen door een schakeling, die hieruit ontstaat door deze capaciteit en/of zelfinductie i.p.v. parallel aan de klemmen parallel aan de zelfinductie en/of capaciteit van het in deze schakeling aanwezige grondtype te schakelen. Dan zijn alle schakelingen bijzondere gevallen van de schakeling van fig. 10 geworden. Een parallelkring in serie met de klemmen, zooals in fig. 10 is geteekend, komt daarbij echter niet voor.

Samenvattend kunnen wij dus het volgende zeggen. Wanneer wij voor een bepaalde toepassing een weerstandslooze vierpool noodig hebben, moeten wij beginnen vast te stellen, hoe hoog de orde van deze vierpool mag zijn. Is de orde gegeven, dan kunnen wij volstaan met de volgens fig. 13 aangegeven vierpolen van deze orde op hun bruikbaarheid voor de gevraagde toepassing te onderzoeken, daar deze samen alle vierpolen van die orde bestrijken. Is zoo gevonden, welke vierpool voor het beoogde doel de beste is, dan kan nog onderzocht worden of wij deze vierpool practisch misschien beter met een andere gelijkwaardige schakeling kunnen realiseeren. Voor het vinden van deze schakelingen kunnen wij gebruik maken van de meetkundige configuraties der netwerken (9). Stuit het realiseeren op practische moeilijkheden, zoodat wij de gewenschte vierpool slechts min of meer kunnen benaderen, dan kunnen wij de met elke practisch uitvoerbare vierpool bereikbare resultaten vergelijken met die, welke met de volgens de theorie gevonden

ideale vierpool zouden zijn te bereiken, en zoo bepalen of het de moeite loont te trachten deze laatste nog beter te benaderen.

Tenslotte vermelden wij nog, dat de synthese van vierpolen met weerstand is onderzocht door Gewertz (6). Het probleem om in dit geval alle vierpolen van een bepaalde orde aan te geven is nog niet opgelost.

AANHANGSEL

Hier volgt het onderzoek van de hoogere orde vierpolen. Wij zagen boven, dat wij de vergelijkingen van een willekeurige weerstandslooze vierpool kunnen geven in de vorm 15) en dat wij deze kunnen realiseeren met de schakeling van fig. 10. Letten wij op de termen $a_1 \frac{p}{p^2 + \omega_1^2}$, $h_1 \frac{p}{p^2 + \omega_1^2}$ en $b_1 \frac{p}{p^2 + \omega_1^2}$ uit 15), dan zullen deze de orde van de vierpool in het algemeen met vier verhoogen, daar $Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2$ een term

$$(a_1 b_1 - h_1^2) \frac{p^2}{(p^2 + \omega_1^2)^2}$$

zal bevatten en deze dus de graad van de noemer met vier zal verhoogen. Alleen als $a_1 b_1 - h_1^2 = o$ zal de orde met twee verhoogd worden. In de schakeling van fig. 10 komt dit tot uiting, doordat in het eerste geval behalve de parallelkring, afgestemd op ω_1, uit het grondtype een parallelkring, afgestemd op ω_1, aanwezig is in serie met de klemmen. De beschouwde termen worden in de figuur dus weergegeven door twee zelfinducties en twee capaciteiten, dus door evenveel elementen als de verhooging van de orde door deze termen bedraagt. Is $a_1 b_1 - h_1^2 = o$, dan is de laatste parallelkring afwezig. Wordt de parallelkring in serie met de klemmen i.p.v. op ω_1 op een andere frequentie afgestemd, dan zal de orde van de vierpool hierdoor niet gewijzigd worden. De eerstbeschouwde vierpool is dus een bijzonder geval van deze nieuwe vierpool. Deze laatste vierpool is echter weer een bijzonder geval van een andere vierpool van dezelfde orde, welke hieruit ontstaat door toevoeging van een ideale transformator, waarvan één van de wikkelingen parallel aan de beschouwde parallelkring ligt en de andere in serie met

de andere in serie geschakelde transformatorwikkelingen. Door deze toevoeging van een ideale transformator wordt de parallelkring dus als het ware in het grondtype van de schakeling opgenomen. Uit deze beschouwingen volgt, dat wij bij het onderzoek van weerstandslooze vierpolen van een willekeurige orde van schakelingen met parallelkringen in serie met de klemmen mogen afzien, omdat deze als bijzondere gevallen van vierpolen van dezelfde orde zonder zulke kringen kunnen worden opgevat.

Even orde.

Wij onderzoeken nu eerst de vierpolen van de even orde $2n$ en wel die, waarvoor A, B en H van de graad $2n$ en C en D van de graad $2n - 1$ zijn. Uit $AB - H^2 = CD$ volgt, dat $AB - H^2$ geen termen van de nulde graad en geen termen van de graad $4n$ bevat. Splitsen wij A/C, H/C en B/C in partieele breuken, dan bevatten deze zoowel een term met $1/p$ als een term met p, zoodat wij de vierpoolgrootheden in de vorm 15) kunnen schrijven. Daar wij, zooals wij boven zagen, van vierpolen met parallelkringen in serie met de klemmen mogen afzien, kunnen wij ons beperken tot die vierpolen, waarvoor $a_k b_k - h_k^2 = 0$ voor k van 1 tot $n - 1$. Daar $AB - H^2$ geen termen van de nulde graad en van de graad $4n$ bevat, is ook $a_0 b_0 - h_0^2 = 0$ en $a_n b_n - h_n^2 = 0$. De vierpool behoort dus tot het grondtype en is te realiseeren met schakelingen van de gedaante van de eerste schakeling van de tweede en van de vierde orde uit fig. 13.

Oneven orde.

Vervolgens onderzoeken wij de vierpolen van de oneven orde $2n + 1$.

a) A, B en H van de graad $2n + 1$, C en D van de graad $2n$. Uit $AB - H^2 = CD$ volgt, dat $AB - H^2$ geen term van de graad $4n + 2$ en CD geen term van de nulde graad bevat. Uit dit laatste volgt, dat òf C òf D geen term van de nulde graad bevat.

a_1) C bevat geen term van de nulde graad.
Om dit te onderzoeken gaan wij uit van de vergelijkingen 23). A, B, H en C hebben een gemeenschappelijke factor p. Na splitsing in partieele breuken kunnen wij dus schrijven

$$\left.\begin{aligned}
\frac{A}{C} &= a_0 \cdot \frac{1}{p} + a_1 \frac{p}{p^2 + \omega_1^2} + \ldots\ldots\ldots + a_n p, \\
\frac{H}{C} &= h_0 \cdot \frac{1}{p} + h_1 \frac{p}{p^2 + \omega_1^2} + \ldots\ldots\ldots + h_n p, \\
\frac{B}{C} &= b_0 \cdot \frac{1}{p} + b_1 \frac{p}{p^2 + \omega_1^2} + \ldots\ldots\ldots + b_n p.
\end{aligned}\right\} \quad 26)$$

Evenals boven is $a_k b_k - h_k^2 = 0$ voor k van 1 tot $n - 1$ en, daar $AB - H^2$ geen term van de graad $4n + 2$ bevat, is ook $a_n b_n - h_n^2 = 0$. Echter zal $a_0 b_0 - h_0^2$ nu niet nul zijn, dus bestaat de vierpool uit het grondtype van de orde $2n$ met een capaciteit in serie met de klemmen.

a_2) D bevat geen term van de nulde graad.

Nu gaan wij uit van de vergelijkingen 25) en hebben A, B, H en D een gemeenschappelijke factor p. Wij komen dan op overeenkomstige wijze tot een vierpool, welke bestaat uit het grondtype van de orde $2n$ met een zelfinductie parallel aan de klemmen.

b) A, B en H van de graad $2n$, C en D van de graad $2n + 1$. Uit $AB - H^2 = CD$ volgt nu, dat $AB - H^2$ geen term van de nulde graad en CD geen term van de graad $4n + 2$ bevat. Uit dit laatste volgt, dat òf C òf D geen term van de graad $2n + 1$ bevat.

b_1) C bevat geen term van de graad $2n + 1$.

Wij gaan weer uit van de vergelijkingen 23) en kunnen weer de vergelijkingen 26) opschrijven. Ook nu is $a_k b_k - h_k^2 = 0$ voor k van 1 tot $n - 1$, terwijl, daar $AB - H^2$ geen term van de nulde graad bevat, ook $a_0 b_0 - h_0^2 = 0$. Echter zal $a_n b_n - h_n^2$ nu niet nul zijn, dus bestaat de vierpool uit het grondtype van de orde $2n$ met een zelfinductie in serie met de klemmen.

b_2) D bevat geen term van de graad $2n + 1$.

Op analoge wijze leidt dit tot een vierpool, welke bestaat uit het grondtype van de orde $2n$ met een capaciteit parallel aan de klemmen.

Vervolg even orde.

Wij moeten nu nog een deel van de vierpolen van even orde onderzoeken en wel willen wij vragen naar de vierpolen, waar-

voor A, B en H van de graad $2n+1$ en C en D van de graad $2n+2$ zijn.

Uit $AB - H^2 = CD$ volgt, dat CD geen term van de graad $4n+4$ en geen term van de nulde graad bevat. Dit leidt tot 4 gevallen.

1) C bevat geen term van de graad $2n+2$ en geen term van de nulde graad,
2) D bevat geen term van de graad $2n+2$ en geen term van de nulde graad,
3) C bevat geen term van de graad $2n+2$ en D geen term van de nulde graad,
4) D bevat geen term van de graad $2n+2$ en C geen term van de nulde graad.

1) C bevat geen term van de graad $2n+2$ en geen term van de nulde graad. Wij gaan nu weer uit van de vergelijkingen 23). A, B, H en C hebben een gemeenschappelijke factor p en wij kunnen weer de vergelijkingen 26) opschrijven. Weer is $a_k b_k - h_k^2 = 0$ voor k van 1 tot $n-1$. Nu zijn echter $a_0 b_0 - h_0^2$ en $a_n b_n - h_n^2$ beide ongelijk nul, zoodat de vierpool bestaat uit het grondtype van de orde $2n$ met een capaciteit en een zelfinductie in serie met de klemmen.

2) D bevat geen term van de graad $2n+2$ en geen term van de nulde graad. Uitgaande van de vergelijkingen 25) komen wij tot een vierpool, welke bestaat uit het grondtype van orde $2n$ met een capaciteit en een zelfinductie parallel aan de klemmen.

3) C bevat geen term van de graad $2n+2$ en D geen term van de nulde graad. Wij gaan uit van de vergelijkingen 23). Splitsen wij A/C, H/C en B/C in partieele breuken, dan bevatten deze een term met p, maar geen term met $1/p$, zoodat wij kunnen schrijven

$$\frac{A}{C} = a_0 \frac{p}{p^2+\omega_0^2} + \ldots\ldots + a_{n-1} \frac{p}{p^2+\omega_{n-1}^2} + a_n p \qquad 27)$$

en overeenkomstige uitdrukkingen voor H/C en B/C. Hierin is weer $a_k b_k - h_k^2 = 0$ voor k van 0 tot $n-1$, terwijl $a_n b_n - h_n^2$ niet nul is. De vierpool bestaat dus uit de vierpool, waarvoor ook $a_n b_n - h_n^2 = 0$, met een zelfinductie in serie met de klemmen. Daar voor de laatstgenoemde vierpool $a_n b_n - h_n^2 = 0$, bevat hiervoor ook D geen term van de graad $2n+2$, zoodat deze vierpool dus van de orde $2n+1$ is en

wel die vierpool, waarvoor A, B en H van de graad $2n+1$, C en D van de graad $2n$ zijn en D geen term van de nulde graad bevat. Dit is de vierpool van de orde $2n+1$, die boven behandeld is onder a_2 en welke bestaat uit het grondtype van de orde $2n$ met een zelfinductie parallel aan de klemmen. De onderzochte vierpool van de orde $2n+2$ bestaat dus uit het grondtype van de orde $2n$ met een zelfinductie parallel en een zelfinductie in serie met de klemmen.

4) D bevat geen term van de graad $2n+2$ en C geen term van de nulde graad. A, B, H en C hebben een gemeenschappelijke factor p. Splitsen wij A/C, H/C en B/C in partieele breuken, dan bevatten deze een term met $1/p$, maar geen term met p, zoodat wij kunnen schrijven

$$\frac{A}{C} = a_0 \cdot \frac{1}{p} + a_1 \frac{p}{p^2+\omega_1^2} + \ldots\ldots + a_n \frac{p}{p^2+\omega_n^2} \tag{28}$$

en overeenkomstige uitdrukkingen voor H/C en B/C. Hierin is weer $a_k b_k - h_k^2 = 0$ voor k van 1 tot n, terwijl $a_0 b_0 - h_0^2$ niet nul is. De vierpool bestaat dus uit de vierpool, waarvoor ook $a_0 b_0 - h_0^2 = 0$, met een capaciteit in serie met de klemmen. Daar voor de laatstgenoemde vierpool $a_0 b_0 - h_0^2 = 0$, bevat hiervoor ook D geen term van de nulde graad, zoodat A, B, H, C en D alle een gemeenschappelijke factor p hebben en deze vierpool dus van de orde $2n+1$ is en wel die vierpool, waarvoor A, B en H van de graad $2n$, C van de graad $2n+1$ en D van de graad $2n-1$ zijn. Dit is de vierpool van de orde $2n+1$, die boven behandeld is onder b_2 en welke bestaat uit het grondtype van de orde $2n$ met een capaciteit parallel aan de klemmen. De onderzochte vierpool van de orde $2n+2$ bestaat dus uit het grondtype van orde $2n$ met een capaciteit parallel en een capaciteit in serie met de klemmen.

SAMENVATTING

Bij tweepolen wordt het begrip *orde* ingevoerd, welke gedefinieerd wordt als de orde van de differentiaalvergelijking van de vrije trillingen van het systeem, dat ontstaat door de tweepool over een weerstand te sluiten. Door het begrip orde uit te breiden tot vierpolen is het mogelijk de weerstandslooze vierpolen van een bepaalde orde aan te geven. Het blijkt, dat er 4 verschillende vierpolen van oneven orde en 5 van even orde mogelijk zijn. In fig. 13 zijn deze voor de nulde tot de vierde orde geteekend.

LITERATUUR

1. O. Brune, Synthesis of a finite two-terminal network whose driving-point impedance is a prescribed function of frequency, Journ. Math. Phys. **10**, 191, 1931.
2. W. Cauer, Die Verwirklichung von Wechselstromwiderständen vorgeschriebener Frequenzabhängigkeit, Arch. f Elektrot. **17**, 355, 1926.
3. W. Cauer, Ein Reaktanztheorem, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. H. **30/32**, 673, 1931.
4. W. Cauer, Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, Band I, 1941.
5. R. M. Foster, A reactance theorem, Bell Syst. Techn. Journ. **3**, 259, 1924.
6. C. Gewertz, Synthesis of a finite, four-terminal network from its prescribed driving-point functions and transfer function, Journ. Math. Phys. **12**, 1, 1933.
7. E. A. Guillemin, Communication networks, Vol. II, 1935, p. 216.
8. B. D. H. Tellegen, Sur les constantes du quadripôle passif, Rev. gén. Electr. **24**, 211, 410, 1928.
9. B. D. H. Tellegen, Meetkundige configuraties en dualiteit van electrische netwerken, Tijdschr. Nederl. Radiogen. **9**, 37, 1941.
10. M. Vaulot, Sur les constantes du quadripôle passif, Rev. gén. Electr. **22**, 493, 1927.

OVER HET STABILISEEREN VAN GELIJKSPANNINGEN

door

H. J. LINDENHOVIUS

Natuurkundig Laboratorium der N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken, Eindhoven, Holland.

Voordracht gehouden voor het Nederlandsch Radiogenootschap op 24 October 1941

Aangegeven worden vier grootheden, die de bruikbaarheid van een gelijkstroomvoedingsbron bepalen. Nagegaan wordt in hoeverre de meest bekende voedingsbronnen aan deze eigenschappen voldoen; aangetoond wordt, dat het met behulp van versterkerbuizen mogelijk is schakelingen te verwezenlijken, die aan heel hooge eischen voldoen.

Tenslotte zijn in een tabel de resultaten overzichtelijk weergegeven.

Herhaaldelijk blijkt voor talrijke doeleinden in fabriek en laboratorium behoefte te bestaan aan een gelijkstroombron met een constante klemspanning, die onafhankelijk is van de stroom die van de bron wordt afgenomen.

Het doel van dit artikel is achtereenvolgens de ons ter beschikking staande stroombronnen te bespreken en na te gaan in hoeverre zij voldoen aan de volgende eischen:

1° groote spanningsconstantheid bij constante stroom,

2° geringe inwendige weerstand,

3° geringe bromspanning,

4° gemakkelijke en nauwkeurige spanningsinstelbaarheid.

We zullen ons beperken tot stroombronnen die bij een spanning van eenige honderden volts een stroom leveren van de orde van *100 mA*.

Achtereenvolgens zullen besproken worden: de accubatterij, het plaatspanningsapparaat en verschillende regelschakelingen die geleid hebben tot het door de firma Philips in de handel

gebrachte gelijkstroomvoedingsapparaat met gestabiliseerde spanning *G. M. 4560*.

De accubatterij.

Vóór de invoering van het plaatspanningsapparaat was de accubatterij de meest toegepaste spanningsbron.

De spanning van een goede accubatterij bij constante stroomsterkte is zeer constant en wordt feitelijk nog slechts door de temperatuur beïnvloed. De inwendige weerstand bedraagt ongeveer *10 ohm* voor een accubatterij van *300 V* en *100 mA* (deze waarden van spanning en stroom houden we ook aan bij de hierna te bespreken spanningsbronnen).

Bij een doelmatige opstelling is de bromspanning uiteraard geheel nul.

De spanning van een accubatterij is niet zonder meer continu instelbaar. Dit zou wel te bereiken zijn door het aanbrengen van een potentiometer over de batterij of een gedeelte daarvan. Dit beteekent echter een extra belasting van de batterij en een vergrooting van de inwendige weerstand.

Verdere bezwaren van de accubatterij zijn het groote gewicht, de groote afmetingen en het vele onderhoud.

Het plaatspanningsapparaat.

Het plaatspanningsapparaat dat sinds vele jaren sterk in zwang is gekomen mist grootendeels deze laatste bezwaren.

De spanningsconstantheid echter bij constante stroom is bij aansluiting van het apparaat op de gewone leidingnetten zeer slecht, daar de klemspanning in ongeveer dezelfde verhouding fluctueert als de netspanning en netspanningsschommelingen van 5 % niet zeldzaam zijn.

De inwendige weerstand bedraagt doorgaans minstens *500 ohm* voor een apparaat van *300 V*, *100 mA*.

De bromspanning bedraagt bij *100 mA* ongeveer *0,1 V* bij gebruik van een normaal afvlakfilter (afvlakcondensatoren van *32* μF, smoorspoel van *8 H*).

Het continu instelbaar maken van de spanning gaat met dezelfde bezwaren gepaard als bij de accubatterij.

De spanningsconstantheid bij constante stroom is te verbeteren door tusschen de uitgangsklemmen neonstabilisatiebuizen aan te brengen. Een netspanningsvariatie van 5 % zal nu de klemspanning met een bedrag van ongeveer *1 Volt* veranderen.

De inwendige weerstand is in dit geval practisch gelijk aan de differentiaalweerstand van de neonbuizen en van de orde van *50* Ω.

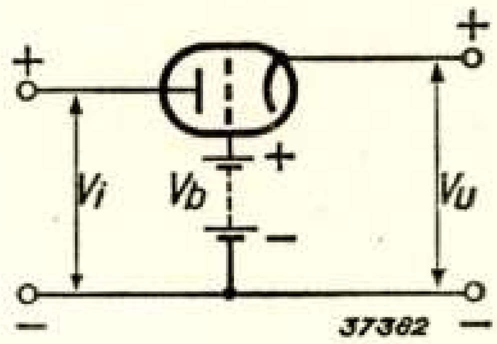
De bromspanning zal ongeveer *0,07 Volt* zijn.

Wat de instelbaarheid betreft geldt hetzelfde als bij de beide eerstgenoemde spanningsbronnen.

In hetgeen nu volgt zullen we aantoonen dat het op verscheidene manieren mogelijk is door toepassing van versterkerbuizen stroombronnen te verwezenlijken waarbij de hiervoor genoemde bezwaren geheel of gedeeltelijk zijn ondervangen.

Regelschakeling met één versterkerbuis.

Als eerste en eenvoudigste voorbeeld nemen we de schakeling van fig. 1.



Figuur 1.

In deze en alle volgende schakelingen moeten we aan de ingangsklemmen V_i een normaal plaatspanningsapparaat aangesloten denken en aan de uitgangsklemmen de belasting.

Het rooster van de triode ligt aan de positieve pool van een droge batterij waarvan de negatieve pool aan de negatieve uitgangsklem ligt.

De werking van deze primitieve stabilisatieschakeling is als volgt:

De uitgangsspanning V_u stelt zich in op een waarde die eenige volts hooger is dan die van de batterij en wel zoodanig dat het rooster van de triode ten opzichte van de kathode juist de negatieve spanning bezit die noodig is om de uitwendig te leveren stroom i door te laten.

Verhoogen we nu de ingangsspanning V_i en daarmede dus de plaatspanning van de triode, *terwijl we de afgegeven stroom ongewijzigd* laten, dan zal ook de spanning V_u stijgen en wel zooveel, dat de toename van de negatieve roosterspanning die als gevolg daarvan optreedt, juist het effect van de plaatspanningsverhooging op de triodestroom compenseert. Daar een geringe rooster-

spanningsverandering in staat is de invloed van een groote plaatspanningsverandering ongedaan te maken, is de veroorzaakte uitgangsspanningsvariatie slechts een fractie van de ingangsspanningsvariatie. In het vervolg zullen we de verhouding

$$\left(\frac{\triangle V_u}{\triangle V_i}\right)_{\triangle i = o}$$

de verzwakkingsfactor a noemen. Deze is dus een maat voor de spanningsconstantheid bij ongewijzigde stroom.

Vergrooten we de afgegeven stroom, *terwijl we de ingangsspanning ongewijzigd laten,* dan zal de uitgangsspanning iets dalen en wel zooveel dat de afname van de negatieve roosterspanning die als gevolg daarvan optreedt de triodestroom juist met het gewenschte bedrag vergroot.

We zullen

$$\left(-\frac{\triangle V_u}{\triangle i}\right)_{\triangle V_i = o}$$

de inwendige weerstand van de regelschakeling noemen.

Om nu a en R_i kwantitatief te kunnen bepalen gaan we uit van de bekende betrekking:

$$\triangle i = S \triangle V_g + \frac{S}{\mu} \triangle V_a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

die het verband weergeeft tusschen variaties in de roosterspanning V_g, de plaatspanning V_a en de plaatstroom i en waarin S de steilheid en μ de versterkingsfactor is.

Voor ons geval is i tevens de afgegeven stroom en geldt verder

$$\triangle V_g = - \triangle V_u \qquad \triangle V_a = \triangle V_i - \triangle V_u, \text{ zoodat}$$

$$\triangle i = - S\left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \triangle V_u + \frac{S}{\mu} \triangle V_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1a)$$

Hieruit leiden we gemakkelijk af:

$$a = \left(\frac{\triangle V_u}{\triangle V_i}\right)_{\triangle i = o} = \frac{1}{\mu + 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

en

$$R_i = \left(- \frac{\triangle V_u}{\triangle i} \right)_{\triangle V_i = o} = \frac{\mu}{S(\mu + 1)} \quad . \; . \; . \; . \; 3)$$

Bij benadering is dus:

$$a = \frac{1}{\mu} \text{ en } R_i = \frac{1}{S}$$

Uit 1a) is ook eenvoudig af te leiden welke verzwakking optreedt indien het apparaat belast is met een constante weerstand R_u. Dan treedt namelijk in de plaats van

$$\triangle i = o, \qquad \triangle i = \frac{\triangle V_u}{R_u}$$

Het resultaat is:

$$\frac{\triangle V_u}{\triangle V_i} = \frac{1}{\mu + 1 + \frac{\mu}{R_u S}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; 4)$$

Eveneens is uit 1a) gemakkelijk te bepalen hoe groot de inwendige weerstand wordt voor het geval het voedingsapparaat dat de spanning V_i levert zelf een inwendige weerstand R_v bezit, dan geldt namelijk in plaats van

$$\triangle V_i = o, \qquad \triangle V_i = - R_v \triangle i$$

en we vinden

$$R_{totaal} = \frac{\mu}{S(\mu + 1)} + \frac{R_v}{\mu + 1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; 5)$$

Vergelijken we 4) met 3) dan zien we dat de inwendige weerstand met een bedrag

$$\frac{R_v}{\mu + 1}$$

vergroot is. Dit is ook duidelijk daar een ingangsspanningsverandering $R_v \triangle i$ blijkens 2) aanleiding geeft tot een uitgangsspanningsverandering

$$\frac{R_v \triangle i}{\mu + 1}.$$

Om een indruk te krijgen van de groote orde van de ons in-

teresseerende grootheden, bij een af te geven vermogen van *300 V, 100 mA*, nemen we aan: $\mu = 20$, $S = 20\ mA/V$ (voor een af te geven stroom van *100 mA* zijn 2 parallel geschakelde buizen noodig), $R_v = 500\ \Omega$ en $V_i = 500$ *Volt*.

We vinden dan uit 1)

$$\frac{\Delta V_u}{\Delta V_i} = 0{,}048$$

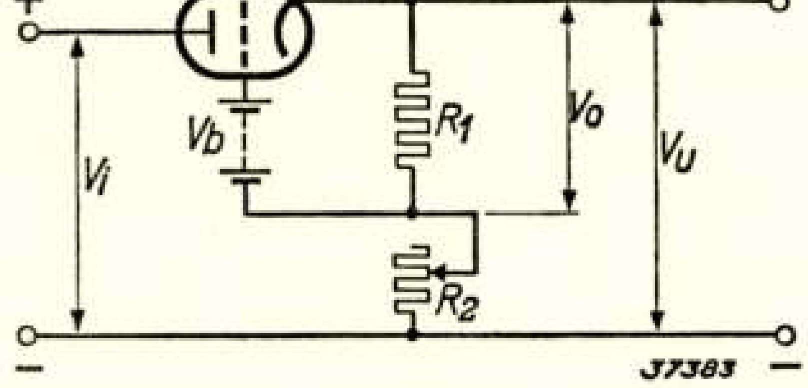
Bij 5% netspanningsverandering is $\Delta V_i = 25$ *Volt* dus $\Delta V_u =$ $= 1{,}2$ *volt*. De inwendige weerstand vinden we uit 5)

$$R_i = 48 + 24 = 72\ ohm$$

De bromspanning van het voedingsapparaat bedraagt bij *100 mA* ongeveer *0,1 Volt*, de bromspanning aan de uitgangsklemmen is een factor *0,048* kleiner dus ongeveer *5 mV*.

Aan de eisch van de instelbaarheid is ook op eenvoudige wijze te voldoen door het rooster van de triode niet aan de positieve pool van de batterij te leggen doch aan de aftakking van een instelbare potentiometer die we over de batterij aanbrengen. Dit beteekent echter een belasting van de batterij die na verloop van tijd een belangrijke spanningsdaling tengevolge zal hebben.

In fig. 2 is een schakeling aangegeven die een continue instelling mogelijk maakt zonder daarbij de batterij te belasten.



Figuur 2.

De negatieve pool van de batterij wordt niet aan de negatieve uitgangsklem gelegd maar aan de aftakking van een instelbare potentiometer die tusschen de uitgangsklemmen is aangebracht.

Al hetgeen in het vorige werd afgeleid voor de uitgangsspanning V_u, geldt nu voor de spanning V_o over de weerstand

R_1 van de potentiometer. Tusschen V_u en V_o bestaat klaarblijkelijk de betrekking:

$$V_u = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_o$$

Hieruit volgt in de eerste plaats, dat de uitgangsspanning lineair afhankelijk is van de variabele weerstand R_2. Verder kunnen we gemakkelijk inzien, dat zoowel a als R_i ongeveer evenredig zullen zijn met V_u/V_o.

Van een uitgangsspanningsvariatie $\triangle V_u$ komt nu namelijk slechts het gedeelte

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} \triangle V_u = \frac{V_o}{V_u} \triangle V_u$$

op het rooster van de triode. Om het rooster op dezelfde manier te beïnvloeden als in de schakeling van fig. 1 is dus een $\frac{V_u}{V_o}$ maal zoo groote uitgangsspanningsvariatie noodig. De bij een gegeven verandering van de ingangsspanning of van de afgenomen stroom optredende schommelingen van V_u blijken dus in eerste instantie met een factor $\frac{V_u}{V_o}$ toe te nemen. We zien hieruit, en dat geldt ook voor de nog volgende schakelingen dat het belangrijk is de spanning V_o en dus de batterijspanning niet lager te kiezen dan noodzakelijk is in verband met de laagste uitgangsspanning die men nog wil kunnen instellen.

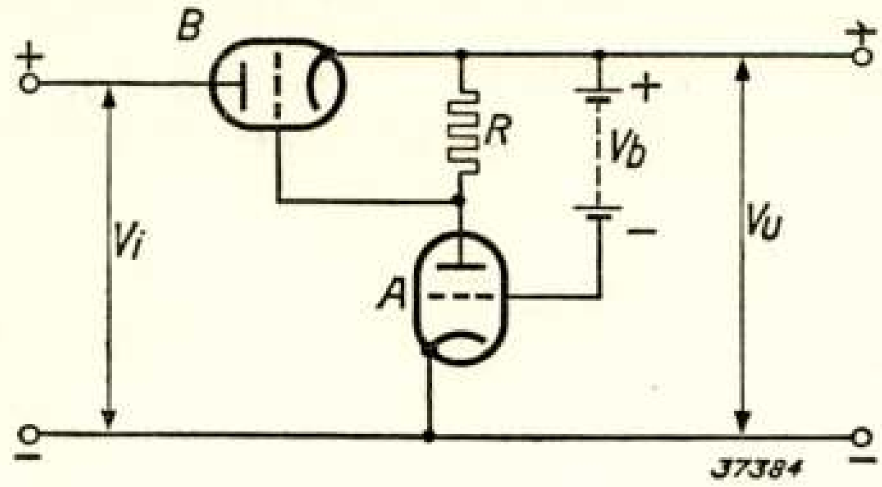
Wenschen we dus bijvoorbeeld de spanning te kunnen varieeren van *150* tot *300 Volt* dan kiezen we dus de batterijspanning iets lager dan *150 Volt*, b.v. *145 Volt*. Een uitgangsspanning van *300 Volt* krijgen we dan door R_2 even groot te kiezen als R_1. De spanningsconstantheid, de inwendige weerstand en de bromspanning hebben dus bij een uitgangsspanning van *150 Volt* de waarden die we in het voorgaande uitrekenden, bij *300 Volt* het tweevoudige daarvan; in dit laatste geval dus respectievelijk *2,4 Volt* per 5$^0/_0$ netspanningsvariatie, *144 Ohm* en *10 mV*

Regelschakeling met twee versterkerbuizen.

Hoewel de beschreven schakeling in eenige gevallen reeds

tot redelijke resultaten voert, is het voor zeer veel toepassingen gewenscht om aan nog hoogere eischen te kunnen voldoen. Een zeer aanzienlijke verbetering kan worden bereikt door de fluctuatie's van de roosterspanning van de regelende buis met behulp van een tweede buis te versterken.

In fig. 3 is de schakeling aangegeven.



Figuur 3.

Stijgt de uitgangsspanning met een bedrag $\triangle V_u$, dan wordt de roosterspanning van buis A evenveel hooger (minder negatief); daardoor stijgt de plaatstroom door R en indien de versterking n bedraagt, zal de roosterspanning van B een bedrag $n \triangle V_u$ meer negatief worden. Hieruit volgt dat wij onze vroegere uitkomsten zonder meer op dit geval kunnen overdragen, indien we maar de steilheid en de versterkingsfactor met een factor n vermenigvuldigen.

In analogie met 4) en 5) vindt men dus direct

$$\frac{\triangle V_u}{\triangle V_i} = \frac{1}{n\mu + 1 + \frac{n\mu}{R_u S}} \approx \frac{1}{n\mu} \quad \text{. . . . . . 6)}$$

$$R_{totaal} = \frac{\mu}{S(n\mu + 1)} + \frac{R_v}{n\mu + 1} \approx \frac{1}{nS} + \frac{R_v}{n\mu} \quad \text{. . . 7)}$$

Zoowel spanningsconstantheid als inwendige weerstand en bromspanning worden dus ongeveer een factor n gunstiger.

Om te bepalen hoe groot de versterking n kan worden dienen we het volgende te overwegen.

De spanning over de weerstand R dient als negatieve roosterspanning van B en varieert, al naar gelang de door het apparaat afgegeven stroom groot of klein is, van ongeveer 1 tot 15 volt.

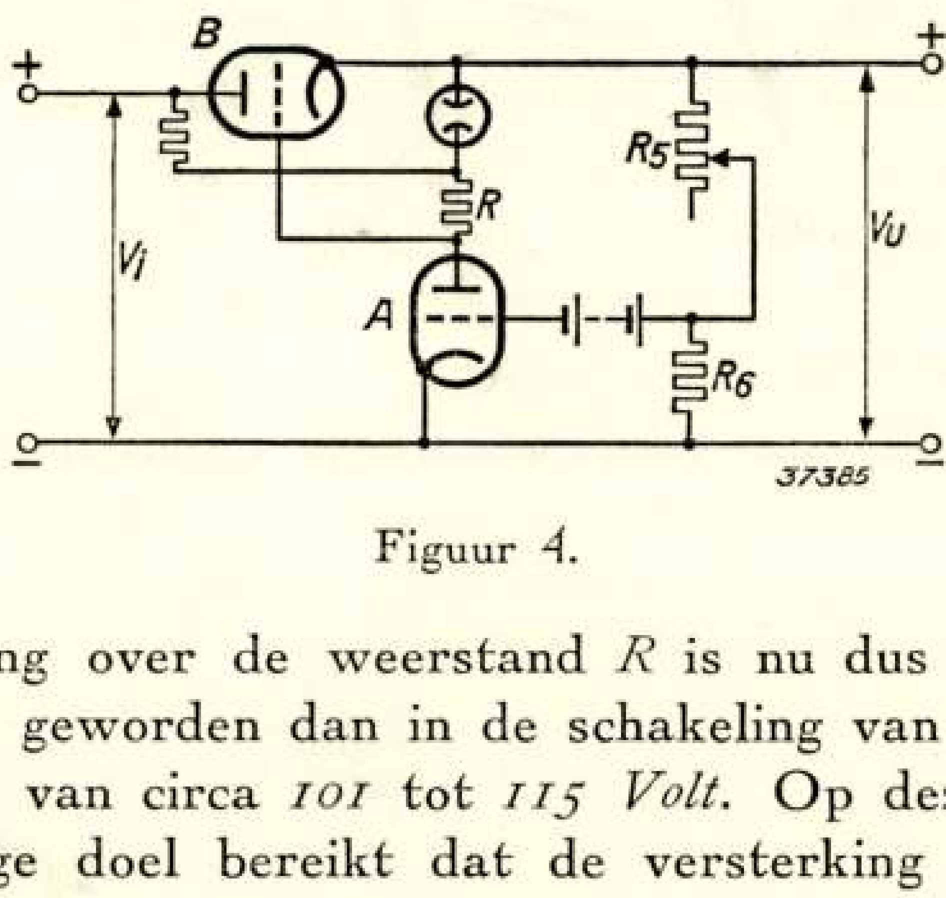
De plaatstroom van A verandert dus ook in de verhouding 1 : 15, wat met zich meebrengt dat, als gevolg van de kromming

van de $i_a - V_g$ karakteristiek, de steilheid van *A* en daardoor de versterking *n* zeer sterk afhankelijk is van de door het apparaat afgegeven stroom. Bovendien is de versterking slechts gering, want voor goede weerstandsversterking is een veel grootere spanningsval over de weerstand noodzakelijk. Immers naarmate deze spanningsval grooter gekozen wordt kan de weerstand *R* grooter worden met behoud van dezelfde plaatstroom dus dezelfde steilheid van *A*.

We willen daarom direct overgaan op een schakeling waarbij deze bezwaren zijn ondervangen.

Regelschakeling met twee versterkerbuizen en spanningsstabilisatiebuis.

De weerstand *R* leggen we aan de positieve electrode van een spanningsstabilisatiebuis, die een brandspanning heeft van ongeveer *100 Volt*, en die vanuit de spanningsbron V_o (fig. 4) over een weerstand wordt gevoed.



Figuur 4.

De spanning over de weerstand *R* is nu dus ongeveer *100 Volt* grooter geworden dan in de schakeling van fig. 3 en varieert nu dus van circa *101* tot *115 Volt*. Op deze wijze is dus het tweeledige doel bereikt dat de versterking veel grooter (*n* is circa 125) en veel beter constant is geworden [1]).

[1]) Het is nog op andere wijze mogelijk het spanningsverval over de weerstand *R* te vergrooten, namelijk door deze weerstand rechtstreeks aan de positieve ingangsspanning te leggen. Stijgt nu de ingangsspanning dan is voor een goede regeling weer noodzakelijk, dat de roosterspanning van de buis *B* meer negatief wordt. Daarvoor is echter in dit geval een veel grootere toename noodig van de plaatstroom van *A* dan in de schakeling met de stabilisatiebuis. Immers zouden we in deze laatste schakeling de plaatstroom van *A* constant houden dan zou ook de roosterspanning van *B* niet veranderen bij stijgende ingangsspanning terwijl in de andere schakeling de roosterpotentiaal van *B* bij constante plaatstroom van *A*

Daar ook de versterkingsfactor μ van buis B slechts weinig afhankelijk is van de afgegeven stroom is de verzwakkingsfactor die volgens verg. 6) ongeveer $\frac{I}{n\mu}$ bedraagt, practisch voor alle waarden van de afgegeven stroom dezelfde. Met de inwendige weerstand, die volgens verg. 7) ongeveer $\frac{I}{nS}+\frac{R_v}{n\mu}$ bedraagt, is dit in veel mindere mate het geval: de steilheid van de buis B neemt af, naarmate de plaatstroom kleiner wordt. Het gevolg daarvan is, dat de inwendige weerstand grooter wordt, naarmate de afgegeven stroomsterkte kleiner is.

Het op deze wijze bereikte resultaat blijkt uit het volgende: kiezen we weer $\mu = 20$, $S = 20\ mA/V$, $R_v = 500\ Ohm$ en $n = 125$ dan vinden we voor

$$\frac{\triangle V_u}{\triangle V_i} = 4 \times 10^{-4}$$

Bij 5% netspanningsvariatie treedt dus een uitgangsspanningsverandering op van $10\ mV$.

De inwendige weerstand bedraagt $0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6\ Ohm$.

De bromspanning is dus $0{,}04\ mV$; de werkelijk gemeten waarde is echter grooter hetgeen wordt veroorzaakt doordat de spanningbepalende elementen in het systeem, buiten de regelschakeling om, door onvermijdelijke capacitieve of inductieve koppelingen met het voedingsgedeelte bromspanning oppikken. Deze is echter steeds kleiner dan $1{,}5\ mV$ te houden.

Op soortgelijke wijze als in het schema van fig. 2 is ook hier de uitgangsspanning continu instelbaar.

We dienen er ook hier rekening mede te houden dat, indien we op deze wijze de spanning van *150* tot *300 Volt* willen kunnen instellen, de ons interesseerende grootheden bij *150 Volt* de waarden hebben die we uitrekenden, bij *300 Volt* het dubbele daarvan.

Verder is het belangrijk de weerstanden R_5 en R_6 niet te groot te kiezen. We bereiken dan namelijk dat, als van het apparaat geen stroom wordt afgenomen, de buis B toch niet

---

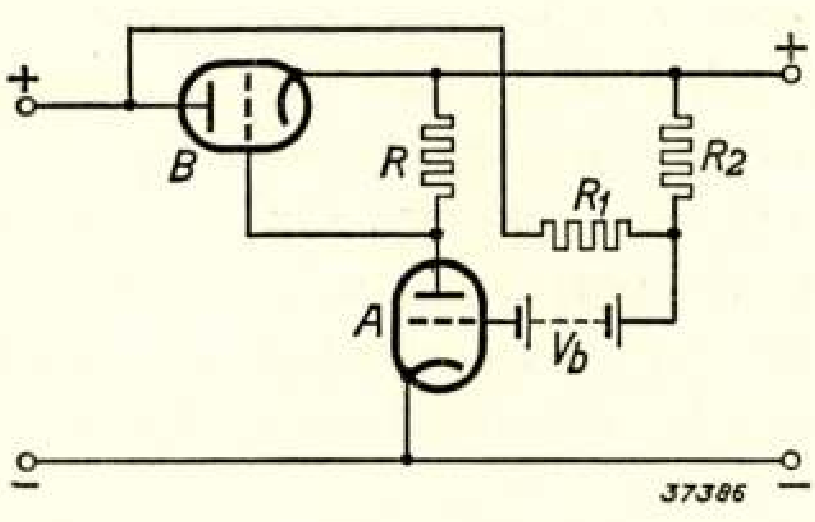
evenveel stijgt als de ingangsspanning. Het teniet doen van deze stijging van de roosterpotentiaal eischt een extra toename van de plaatstroom van A. Een nadere beschouwing leert dat de verandering van de roosterspanning van de buis A in dit geval een factor μ grooter moet zijn, dan in de schakeling met de stabilisatiebuis. De regeling is dus ook een factor μ slechter.

sterk „afgeknepen" wordt. De steilheid wordt dus niet al te klein en de waarden van a en R_i blijven dus kleiner en beter constant.

Regelschakeling met twee versterkerbuizen, stabilisatiebuis en compensatie.

Het bij de tot nu toe beschreven schakelingen gevolgde principe veroorlooft weliswaar een zeer sterke reductie van de spanningsvariatie's maar het is principiëel onmogelijk om op de beschreven wijze een volledige opheffing van de spanningsvariatie's te bereiken. Immers de versterkerbuis A en daarmede tevens de buis B wordt gestuurd door de uitgangsspanning; om het regelorgaan in werking te doen treden is het dus principiëel noodzakelijk, dat de uitgangsspanning een zekere, zij het dan ook kleine, verandering ondergaat. Door het stuurrooster van de versterkerbuis niet alleen met de uitgangszijde, maar ook met andere punten van de schakeling te koppelen, is het echter mogelijk de resteerende spanningsverandering nog te compenseeren en desgewenscht zelfs een overcompensatie te bereiken.

Fig. 5 laat zien, op welke wijze de invloed van een variatie van de ingangsspanning op de uitgangsspanning kan worden gecompenseerd. Wenscht men, dat de uitgangsspanning en de



Figuur 5.

door de buis B loopende uitgangsstroom exact constant blijven, terwijl de ingangsspanning met een bedrag $\triangle V_i$ verandert, dan moet de stuurroosterspanning van buis B een tegengestelde verandering met een bedrag $\triangle V_g = \frac{V_i}{\mu}$ ondergaan. Deze verandering is n maal zoo groot als de verandering van de roosterspanning van buis A, zoodat deze verandering de waarde

$$\triangle V_{gA} = \frac{\triangle V_i}{n\mu} \qquad \text{8)}$$

moet bezitten. Nu is V_{gA} gelijk aan de volmaakt constant ondersteIde uitgangsspanning, verminderd met de eveneens geheel constante batterijspanning en het spanningsverlies over de weerstand R_2. Dit laatste varieert met de ingangsspanning volgens de betrekking

$$\triangle V_{R_2} = \triangle V_i \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Teneinde aan verg. 8) te voldoen, moet men de weerstanden zoodanig kiezen, dat

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{n\mu} \qquad \text{9)}$$

Voor $n = 125$, $\mu = 20$ levert dit $\frac{R_1}{R_2} = 2500$ dus bijv. $R_1 = 2{,}5$ *Megohm*, $R_2 = 1000$ *Ohm*.

Gezien het feit dat het op deze wijze mogelijk is de spanningsvariatie's geheel op te heffen, zou men zich kunnen afvragen, waartoe het dan nog noodzakelijk is om n zoo groot mogelijk te maken.

Dit zou inderdaad overbodig zijn, wanneer men aan verg. 9) voor alle bedrijfstoestanden exact kon voldoen.

Daar echter, ook bij toepassing van de neonbuis volgens fig. 4 zoowel n als μ nog eenigszins met de afgegeven stroomsterkte varieeren, is dit niet mogelijk. Er blijft dus voor de meeste bedrijfstoestanden een zekere spanningsvariatie over, die positief of negatief kan zijn en bij benadering gegeven is door:

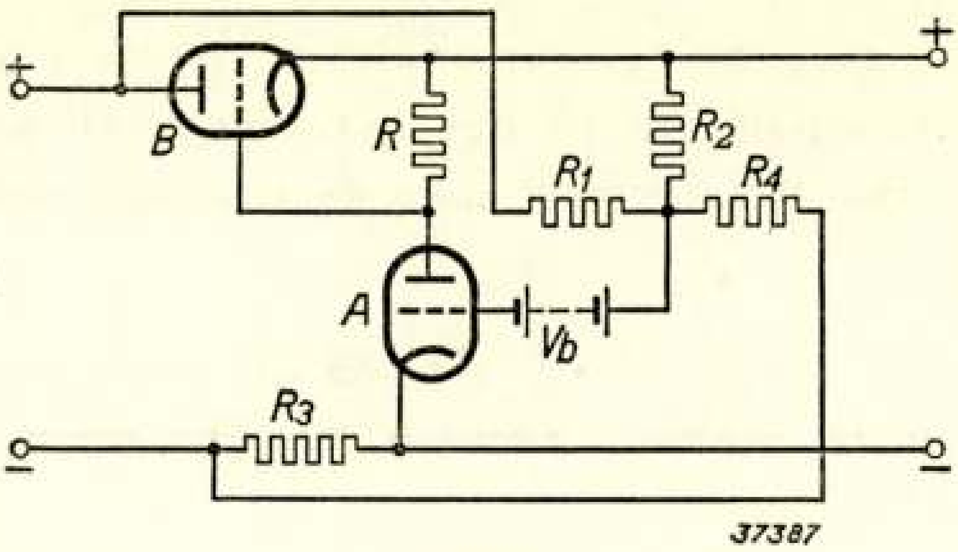
$$\frac{\triangle V_u}{\triangle V_i} \approx \frac{1}{n\mu} - \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Zij is dus kleiner naarmate n grooter is.

Hebben we, door te voldoen aan verg. 8) een volledige spanningscompensatie verkregen, dan verdwijnt tevens het gedeelte van de inwendige weerstand, dat afkomstig is van R_v (verg. 5 en 7).

Door een kleine uitbreiding van de compensatieschakeling kan

men echter het overblijvende gedeelte van de inwendige weerstand eveneens exact compenseeren.



Figuur 6.

In fig. 6 is het schema aangegeven. Wij beschouwen een stroomverandering $\triangle i$ en willen weer onderstellen, dat de uitgangsspanning exact constant blijft.

Voor de verandering van de stuurroosterspanningen van de buizen B en A volgt dan respectievelijk

$$\triangle V_{gB} = \frac{\triangle i}{S},$$

waarin S de steilheid van buis B,

$$\triangle V_{gA} = \frac{1}{n} \triangle V_{gB} = \frac{\triangle i}{nS} \qquad \ldots\ldots \quad 10)$$

Door juiste keuze van de weerstanden R_3 en R_4 kan men de gewenschte verandering van de stuurroosterspanning van buis A verkrijgen. De stroomvariatie veroorzaakt over de weerstand R_3 een spanningsvariatie $R_3 \triangle i$ en hiervan komt de fractie $\frac{R_2}{R_2 + R_4}$ op het stuurrooster van de buis A. (Ondersteld is hierbij $R_1 \gg R_2$, wat steeds het geval is). Door dit gelijk te stellen aan de volgens verg. 10) vereischte waarde verkrijgt men als conditie voor het verdwijnen van de inwendige weerstand de betrekking

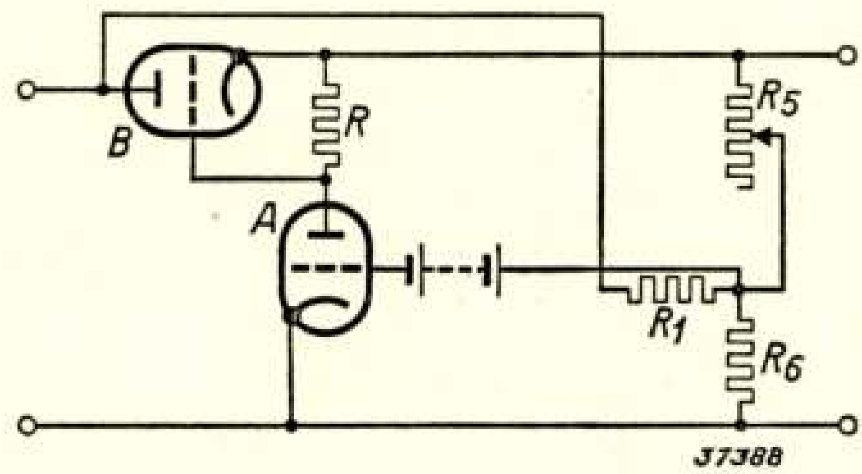
$$R_3 \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_4} = \frac{1}{nS} \qquad \ldots\ldots\ldots \quad 11)$$

Met $n = 125$, $S = 20\ mA/V$, $R_2 = 1000\ Ohm$ en bijv. $R_4 = 50.000\ Ohm$ komen we tot $R_3 = 20\ Ohm$.

Daar S vrij sterk en ook n in zekere mate met de stroomsterkte verandert zal verg. 11) slechts voor een bepaalde waarde van de stroomsterkte exact gelden. Er blijft dan in het algemeen een zekere inwendige weerstand over die gegeven is door:

$$R_{totaal} \approx \frac{1}{nS} - \frac{R_2}{R_2 + R_4} R_3 + R_v \left(\frac{1}{n\mu} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)$$

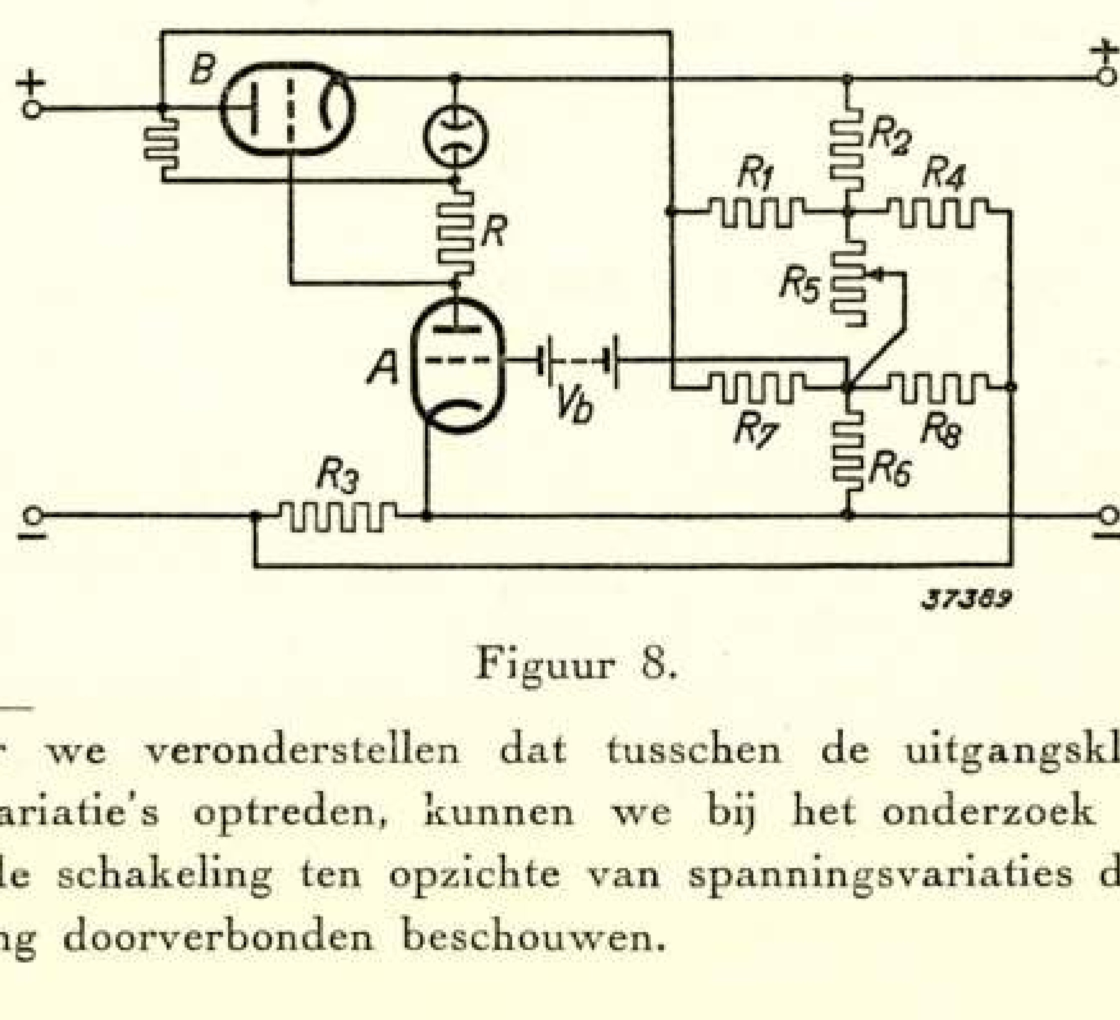
Een moeilijkheid ontstaat nu als we de spanning weer instelbaar wenschen te maken. Zouden we dit doen op een wijze



Figuur 7.

als in fig. 7 voor spanningscompensatie is aangegeven, dan zou de mate van compensatie afhankelijk zijn van de ingestelde spanning. Immers, het gedeelte van de ingangsspanningsvariatie $\triangle V_i$, dat op het rooster van A komt, wordt bepaald door de verhouding van R_1 tot de parallelschakeling van R_5 en R_6 [1]) en is daarom afhankelijk van R_5.

Het gevolg zou zijn, dat, indien bij lage uitgangsspanning de

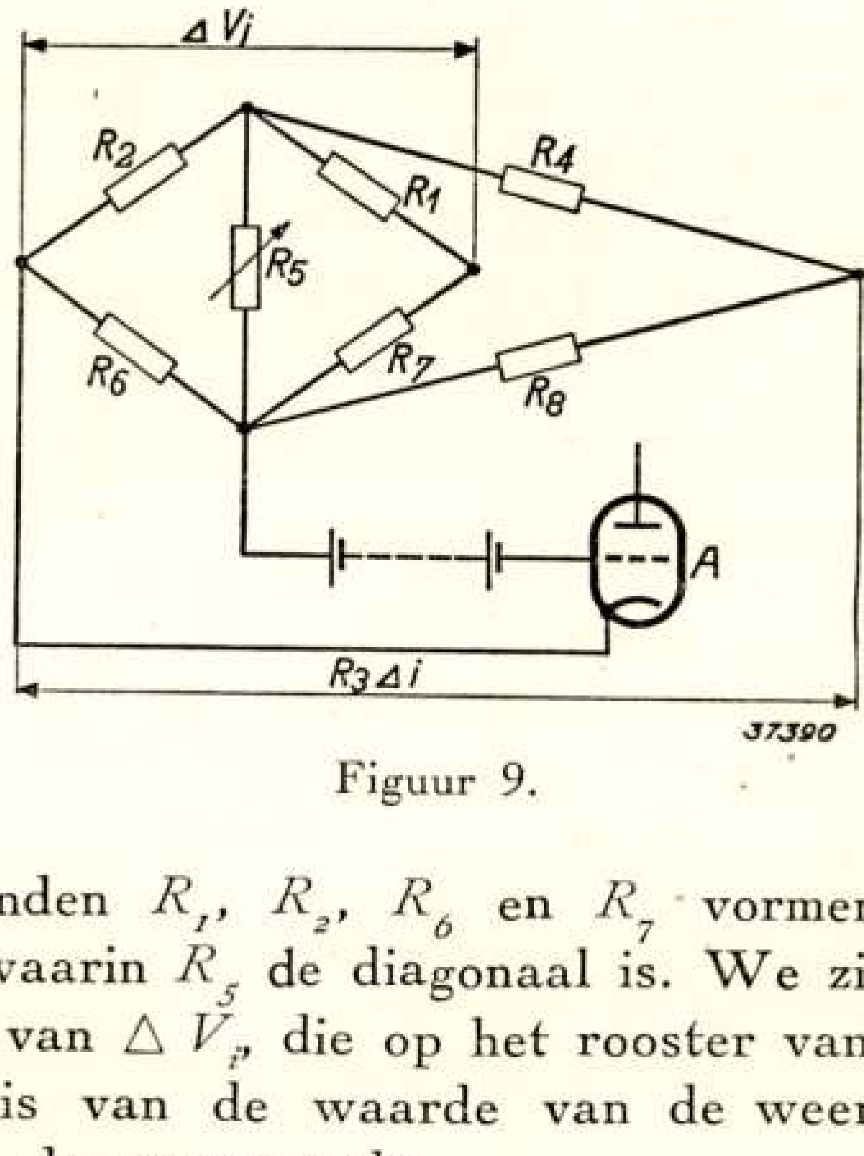


Figuur 8.

[1]) Daar we veronderstellen dat tusschen de uitgangsklemmen geen spanningsvariatie's optreden, kunnen we bij het onderzoek naar het gedrag van de schakeling ten opzichte van spanningsvariaties deze klemmen als onderling doorverbonden beschouwen.

compensatie juist is, bij hooge uitgangsspanning overcompensatie zou optreden, d.w.z. uitgangsspanningsverlaging bij ingangsspanningsverhooging. Dezelfde moeilijkheid treedt in gelijke mate op voor wat betreft de compensatie van de inwendige weerstand.

Het is nu echter mogelijk met behulp van een brugschakeling deze bezwaren te ondervangen. In het volledige schema, fig. 8, is deze schakeling aangegeven zoowel voor spanningscompensatie als voor compensatie van de inwendige weerstand. De brugschakeling uit deze figuur is ter wille van de duidelijkheid nog eens afzonderlijk in fig. 9 aangegeven.



Figuur 9.

De weerstanden R_1, R_2, R_6 en R_7 vormen een brug van Wheatstone, waarin R_5 de diagonaal is. We zien onmiddellijk dat de fractie van $\triangle V_i$, die op het rooster van buis A komt. onafhankelijk is van de waarde van de weerstand R_5, mits voldaan is aan de voorwaarde

$$R_1 : R_2 = R_7 : R_6$$

Maken we bovendien deze verhouding, overeenkomstig verg. 9) gelijk aan $n\mu - 1$, dan is daarmede tevens aan de compensatievoorwaarde voldaan.

We hebben dus bereikt, dat, onafhankelijk van de grootte van de weerstand R_5, voor alle waarden van de ingestelde spanning de spanningscompensatie juist is.

Hetzelfde geldt ook voor de compensatie van de inwendige weerstand. Hier wordt de brug gevormd voor de weerstanden R_4, R_2, R_6 en R_8 met R_5 weer als diagonaal. Is nu weer:

$$R_4 : R_2 = R_8 : R_6$$

en bovendien deze verhouding overeenkomstig verg. 11) gelijk aan $nSR_3 - 1$, dan is ook de compensatie van de inwendige weerstand voor alle waarden van de ingestelde spanning juist.

We zien dus dat bij deze schakeling voor alle spanningen bij één stroomsterkte zoowel de spanningsvariatie bij netspanningswijzigingen, als de inwendige weerstand en de bromspanning exact nul zijn te maken (de bromspanning met het voorbehoud dat we bij de vorige schakeling reeds maakten).

Het gelijkstroomvoedingsapparaat met gestabiliseerde spanning GM 4560

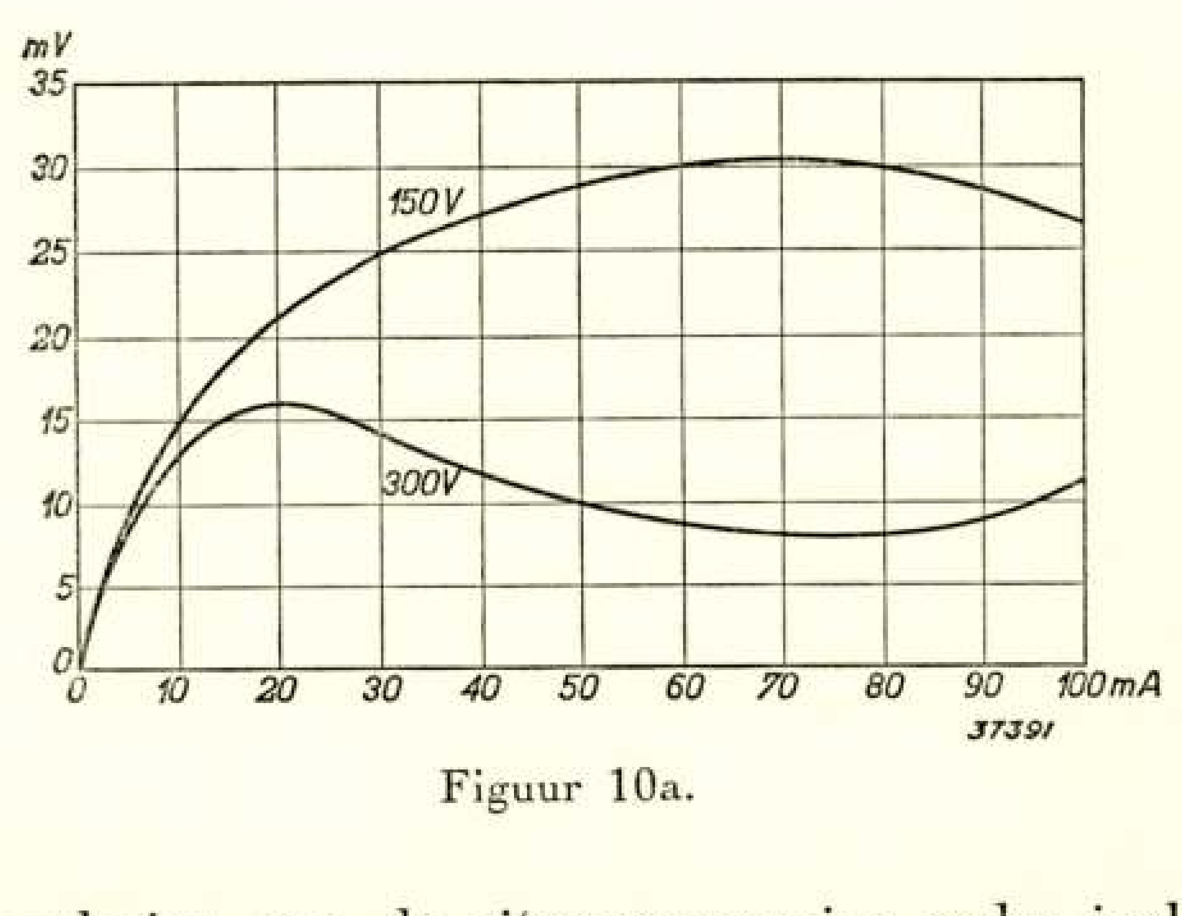
Het gelijkstroomvoedingsapparaat met gestabiliseerde spanning *GM 4560* werd ontwikkeld volgens de gezichtspunten die in het vorige werden uiteengezet.

De uitgangsspanning kan tusschen *150* en *300 Volt* continu zeer nauwkeurig worden ingesteld. Het grof instellen geschiedt in 10 trappen van *15 Volt* met een schakelaar, het fijn instellen over een bereik van *30 Volt* met een continue variabele weerstand.

Als vergelijkingsspanning dient een droge batterij van *120 Volt*.

De maximale stroomsterkte bedraagt *100 mA*.

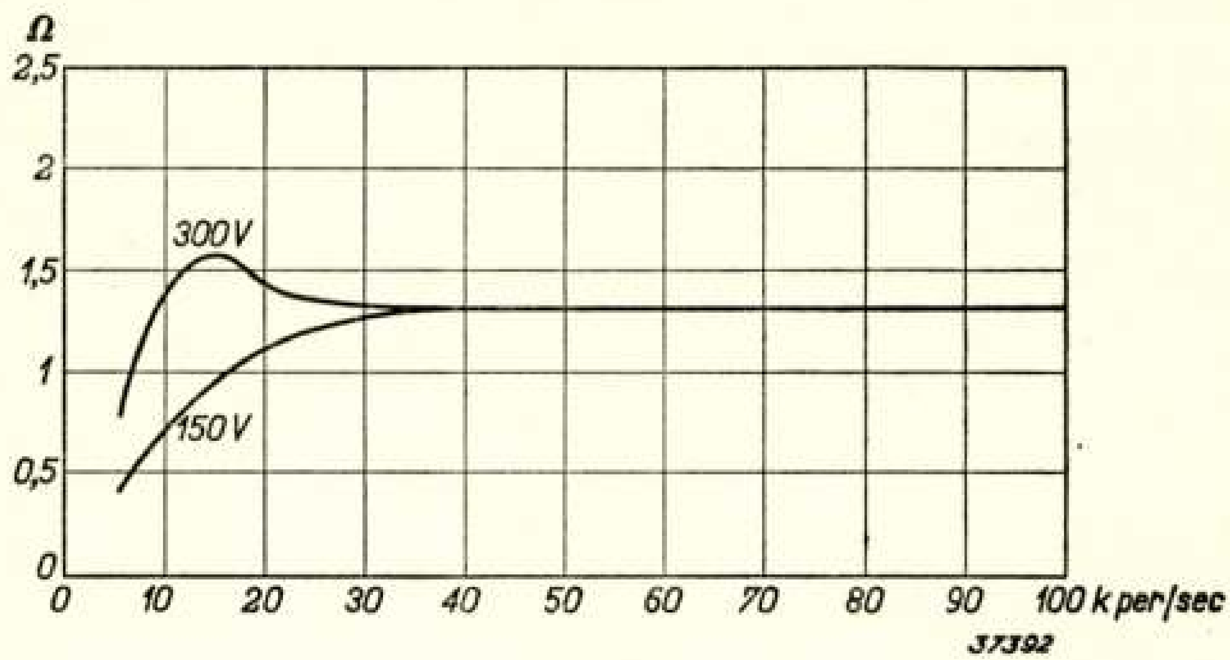
Een netspanningsvariatie van 5% levert, onafhankelijk van de afgegeven stroom een uitgangsspanningsverandering van minder dan *6 mV* bij een instelling op *150 volt*, minder dan *12 mV* bij *300 Volt*.



Figuur 10a.

De verandering van de uitgangsspanning onder invloed van de belasting is in fig. 10a weergegeven voor twee verschillende uitgangsspanningen. De helling van deze karakteristiek levert

ons de inwendige weerstand. Deze blijkt voor stroomsterkte grooter dan *30 mA* hoogstens *0,5 Ohm* te zijn bij een instelling op *150 Volt* en hoogstens *1 Ohm* bij een instelling op *300 Volt*. Voor stroomen kleiner dan *30 mA* kan de inwendige weerstand het 4-voudige van deze weerstand bedragen. (Fig. 10a en 10b).



Figuur 10b.

Onderstaande tabel geeft nu een overzicht van de resultaten die we met de verschillende besproken schakelingen kunnen be-

	Uitg.sp.var. bij 5% *Netsp. var. in V*	Inwendige weerstand in *Ohms*	Bromspanning in *mV*	Spanningsinstelbaarheid
Accu	0	10	0	slecht
Plaatspanningsapparaat	15	500	100	slecht
Met neonbuizen gestabiliseerd plaatspanningsapparaat	1,5	50	70	slecht
Regelschakeling met één versterkerbuis	2,4	144	10	goed
Regelschakeling met twee versterkerbuizen	0,8	50	3	goed
Regelschakeling met twee versterkerbuizen en stabilisatiebuis	0,02	1,2	< 2,5	goed
Regelschakeling met twee versterkerbuizen, stabilisatiebuis en compensatie	0	0	< 2,5	goed
GM 4560 Bij 150 Volt (*i* < *30 mA*	< 0,006	< 2	< 1,5	goed
GM 4560 Bij 150 Volt (*i* > *30 mA*		< 0,5		
GM 4560 Bij 300 Volt (*i* < *30 mA*	< 0,012	< 4	< 2,5	
GM 4560 Bij 300 Volt (*i* > *30 mA*		< 1		

reiken. De daarin voorkomende waarden van de kenmerkende grootheden hebben betrekking op een uitgangsspanning van *300 Volt* bij een afgegeven stroom van *100 mA*, verder wordt bij de regelschakelingen aangenomen, dat de spanning over een bereik van *150* tot *300 Volt* kan worden ingesteld.

Eenige details.

a) De inwendige weerstand voor wisselstroomen.

Het zal vaak voorkomen dat het apparaat behalve gelijkstroom ook nog wisselstroom zal moeten leveren, bijvoorbeeld indien we het gebruiken als voedingsbron voor een wisselstroomversterker. Van veel belang kan het daarbij zijn (bijvoorbeeld ter vermijding van ongewenschte koppelingen in versterkers) dat de daarbij aan de uitgangsklemmen optredende wisselspanningen klein zijn; met andere woorden: we wenschen, dat de „inwendige impedantie" voor wisselstroomen klein is. Hoe ontstaat deze „inwendige impedantie"?

We zagen dat de inwendige weerstand afhangt van de versterking n van buis A. Deze nu zal bij toenemende frequentie afnemen tengevolge van de capaciteit C_o, die onvermijdelijk over de weerstand R aanwezig is en hoofdzakelijk gevormd wordt door de rooster-kathodecapaciteit van de buis B. Het gevolg zal zijn dat de inwendige weerstand naar hoogere frequentie toeneemt. Het is, alsof zich in serie met de inwendige weerstand voor gelijkstroom R_i een „inwendige zelfinductie" L_i bevindt. De volgende berekening levert ons de waarde van deze „inwendige zelfinductie".

Uit form. *7*) volgt:

$$Z = \frac{1}{nS_A}$$ (De inwendige weerstand R_v van het voedingsgedeelte is voor hoogere frequentie's te verwaarloozen).

$$n = S_B \frac{R}{1 + j\omega RC_o}$$

dus

$$Z = \frac{1 + j\omega RC_o}{RS_A S_B}$$

$$= \frac{1}{RS_A S_B} + j\omega \frac{C_o}{S_A S_B}$$

$\frac{I}{RS_A S_B}$ is de niet-gecompenseerde gelijkstroomweerstand,

$\frac{C_o}{S_A S_B}$ is de „inwendige zelfinductie".

Bij weerstandsversterking is S ongeveer *0,6 mA/V*, S_B is weer *20 mA/V*, C_o *20 pF*.

Voor de „inwendige zelfinductie" vinden we dan *1,7 μH*. Om nu te voorkomen, dat bij hooge frequenties de inwendige impedantie van het apparaat te groot wordt, zijn over de uitgangsklemmen electrolytische condensatoren geplaatst. De inwendige impedantie bestaat dan, voor het geval de inwendige weerstand voor gelijkstroom op de beschreven wijze tot nul is teruggebracht, uit een verliesvrije zelfinductie parallel aan de electrolytische condensatoren. Zetten we de inwendige impedentie uit tegen de frequentie, dan verkrijgen we een resonantiekromme, die echter dank zij de serieweerstand van de condensatoren sterk gedempt blijkt te zijn. Door de keuze van de capaciteit en de serieweerstand zijn we in staat de vorm van de resonantiekromme (de frequentiekarakteristiek) nog in ruime mate te beïnvloeden.

In fig. 10b is voor twee verschillende waarden van de uitgangsspanning aangegeven, hoe de inwendige impedantie van het apparaat afhangt van de frequentie.

We zien dat deze voor alle frequenties kleiner is dan *1,6 Ohm*. Dat de impedantie bij *100 k per./sec* nog ruim *1 Ohm* bedraagt is te wijten aan de serieweerstand van de electrolytische condensatoren.

Bij nog hoogere frequenties is de impedantie kleiner, doordat parallel aan de electrolytische condensatoren nog een papiercondensator is aangebracht, waarvan de serieweerstand vele malen kleiner is.

b) De invloed van gloeispanningsvariaties op de uitgangsspanning. Bij netspanningsvariaties treden niet alleen plaatspannings-, doch evenzeer gloeispannings-veranderingen op. Verhoogen we de gloeispanning van de buis *A*, terwijl we de door het apparaat afgegeven stroom ongewijzigd laten, dan zal de uitgangsspanning dalen. De roosterspanning van de buis *A* wordt daardoor namelijk meer negatief en voorkomt de toename van de plaatstroom van deze buis die een gevolg zou zijn van de gloeispanningsverhooging.

Om het optreden van dit effect te beletten wordt de

gloeidraad van de buis *A* gevoed over een stroomstabilisatiebuis, die de gloeistroom binnen zeer nauwe grenzen constant houdt.

Hierbij ontmoeten wij echter het bezwaar dat onmiddellijk na het inschakelen de buis *A* minder snel wordt opgewarmd dan de buis *B*, daar de stabilisatiebuis juist de sterke gloeistroomvergrooting tegengaat die bij een koude kathode optreedt.

Gedurende eenige tijd na het inschakelen levert de buis *A* dus nog geen plaatstroom, de buis *B* heeft dus geen negatieve roosterspanning en de uitgangsspanning stijgt tot ver boven de ingestelde waarde, waarop zij eerst terugvalt als de buis *A* voldoende is opgewarmd.

Dit bezwaar wordt opgeheven door de gloeidraad na het inschakelen eerst aan de volle gloeispanning te leggen en pas na eenige tijd om te schakelen op de stabilisatiebuis. Dit omschakelen nu geschiedt automatisch met behulp van een relais dat via een weerstand tusschen de uitgangsklemmen is aangesloten. Zoodra de uitgangsspanning een zekere waarde, bijvoorbeeld *100 Volt*, overschrijdt, schakelt het relais de directe gloeispanning uit en de stabilisatiebuis in.

Het is onnoodig de gloeispanning van de buis *B* te stabiliseeren, daar gemakkelijk is in te zien dat gloeispanningsvariatie's van de buis *B n* maal minder invloed hebben, dan die van de buis *A*.

c) De aard van de vergelijkingsspanning.

Bij de hier beschreven schakelingen werd als vergelijkingsspanning steeds genoemd de droge batterij. Het is echter ook mogelijk om in plaats hiervan een neonstabilisatiebuis te nemen, die we aanbrengen tusschen de kathode van de buis *A* en de negatieve uitgangsklem en die vanuit de positieve in-, of beter, uitgangsspanning gevoed wordt over een weerstand.

In het huidige stadium van de ontwikkeling voldoet echter een stabilisatiebuis nog niet aan die eischen van spanningsconstantheid, die we aan een droge batterij kunnen stellen.

TIJDSCHRIFT VAN HET NEDERLANDSCH RADIOGENOOTSCHAP
DEEL IX AUGUSTUS 1942 No. 6

OVER DE TOEPASSING VAN DRAAGGOLF TELEFONIE IN HET NEDERLANDSCHE TELEFOONNET

door

G. H. BAST

Voordracht gehouden voor het Nederlandsch Radio Genootschap op 27 Maart 1942.

Inleiding.

In de ontwikkeling van de techniek der telefoon-transmissie is in de laatste tien jaren een sterke uitbreiding van tal van soorten draaggolf-telefonie te bespeuren. Vóór dien tijd beperkte de toepassing van draaggolf-telefonie zich vrijwel geheel tot de bovengrondsche lijnen en tot enkele bijzondere gevallen op zeekabels; sedert dien zijn er evenwel verschillende stelsels ontwikkeld voor toepassing op landkabels, waarvan er sommige een zoodanige vlucht hebben genomen, dat zij, naar de opvattingen van thans, de normale bouwsteenen vormen voor interlokale telefoonnetten en op dat terrein de laagfrequent-kabels, althans voor de langere verbindingen, geheel hebben verdrongen.

In de ontwikkeling van deze stelsels vallen twee stroomingen op, één waarbij van de normale laagfrequent-kabels uit overgegaan werd op gepupiniseerde lijnen eerst met één, later met vier draaggolfkanalen boven de laagfrequentband (vooral in Duitschland en Engeland) ofwel met weglaten der pupiniseering met een twaalftal kanalen per ader werd gewerkt (Amerika en Japan); en daarnaast een andere, waarbij in speciaal geconstrueerde hoogfrequent-kabels eenige honderden kanalen op een enkel circuit werden toegepast. De ontwikkeling van deze laatste systemen hield veelal verband met het streven naar kabels voor televisie-overdracht (Amerika, Duitschland en Engeland).

Bij de ontwikkeling van de eerst bedoelde stelsels zat mede de bedoeling voor om op de reeds bestaande laagfrequent kabels met behulp van draaggolfkanalen een aanzienlijke uit-

breiding mogelijk te maken. Hierdoor werden aan deze stelsels beperkingen opgelegd, die in nieuwe kabels niet noodig zouden zijn geweest.

In Engeland en in ons land hebben de omstandigheden er toe geleid, dat de keuze viel op een stelsel van de eerste soort, dat echter in nieuwe, reeds met het oog op de toepassing van hoogere frequenties berekende, kabels van een constructie, die geheel uit de fabrikatie der laagfrequent kabels is voortgekomen. Aanvankelijk werden deze kabels bestemd voor het werken met 12 kanalen per dubbelader, later is gebleken, dat de kwaliteit dezer kabels toeliet om een breedere frequentie-band te gebruiken. De circuits worden niet gepupiniseerd, en er wordt een aparte kabel gebruikt voor elk van de beide spreekrichtingen, men spreekt daarom van *dubbelkabels*. Deze dubbelkabels waren in ons land sedert 1930 ook voor laagfrequent vierdraadslijnen toegepast, teneinde bij uitstek gunstige condities voor de kwaliteit der interlokale verbindingen te verkrijgen. Het is bij deze dubbelkabels mogelijk om de versterkingsgraad der versterkers zeer hoog op te voeren zonder gevaar voor hinderlijk overspreken, omdat de beide spreekrichtingen geheel van elkaar zijn afgeschermd; daarmede is aan de eerste voorwaarde voldaan om draaggolftelefonie toe te kunnen passen, n.l. de mogelijkheid van een groote versterking om de hooge demping in de hoogere frequenties weer op te heffen.

Het kabeltype.

In ons land is omstreeks 1935 een aanvang gemaakt met de invoering van draaggolfkabels in het net. Als kabel werd een sterkabel met 12 stergroepen (24 paren) gekozen. Bij de eerste kabels, waarvan er eenige door de Allgemeine Elektrizitäts Gesellschaft en andere door de Nederlandsche Kabelfabriek geleverd werden bedroeg de ader-diameter 1,5 m.m. Bij de latere kabels is dit genormaliseerd op 1,3 m.m. In de keuze van deze constructie hebben verschillende overwegingen een rol gespeeld, zooals: bij de normale uitvoering van groepen met papier-lucht isolatie voor de aders zouden veel dunnere draden slappe groepen hebben opgeleverd met het gevaar dat daarin moeilijker aan de hooge eischen voor de ontkoppeling der circuits zou kunnen worden voldaan. Veel dikkere aders zouden stug en moeilijk te verwerken zijn, terwijl de winst aan demping die het grootere oppervlak doet verwachten voor een zeer

groot deel te niet gedaan wordt door de grootere wervelstroomverliezen en het huideffect. Met behulp van de 1,3 m.m. kabels kunnen bij versterkerafstanden van rond 40 km. frequentiebanden tot c.a. *60 kHz* worden overgebracht, d.w.z. de kabeldemping kan in deze band door de versterkers worden opgeheven en dit proces kan vele malen herhaald worden, zoodat er groote afstanden overbrugd kunnen worden.

Voor een spraakkanaal is een frequentieband van *4 kHz* noodig, er zouden in een band van *60 kHz* dus 15 gesprekken naast elkaar geplaatst kunnen worden. In den regel laat men de laagste 2 of 3 kanalen hiervan weg met het oog op de groote extra eischen die deze zouden stellen aan den omvang van de versterkeronderdeelen, de effening der demping en het constant houden daarvan, en gebruikt men 12 kanalen tusschen *12* en *60 kHz* of tusschen *8* en *56 kHz*.

De kabels zijn zóó goed vrij van onderlinge koppelingen tusschen de 24 paren, dat elk hiervan met 12 kanalen bedreven kan worden, per kabel komt men dan tot 288 gelijktijdige gesprekken.

Bij de opzet van ons draaggolfkabelnet is er niet meteen een vaste versterkerafstand vastgelegd. Er waren in Nederland een aantal Districtshoofdplaatsen op onderlinge afstanden van 25 tot 100 km. die met laagfrequentversterkers waren uitgerust, en de knooppunten van het net vormden; dit waren dus in de eerste plaats geschikte versterkerpunten. Al naar gelang hun onderlinge afstand zou het noodig zijn hiertusschen al of niet een of meer extra versterkersstations aan te brengen. Daar het bovendien nog niet vastlag, hoever men met de kabels zou kunnen gaan, is het stichten van de tusschenversterkersstations aan de voortschrijdende behoefte en de ontwikkeling overgelaten. Op het oogenblik bedraagt de versterkerafstand in het middennet 25 à 30 km., in de uitloopers 50 à 60 km. Hiermede kan in het middennet met 20 kanalen per paar, in het buitengedeelte met 6 tot 8 kanalen per paar gewerkt worden.

De balanceering.

De vrijheid van overspreken is op de volgende wijze verkregen:

1) Er worden twee kabels naast elkander gelegd, één voor de spreekrichting A—B, de andere voor de spreekrichting B—A. Door deze maatregel komen er in elke kabel slechts

gesprekken voor in ééne richting. De spreekstroomen vinden in elke dubbelader dezelfde demping en dezelfde fasedraaing. Is er plaatselijk een koppeling aanwezig tusschen twee paren, dan is het voor het effect daarvan onverschillig of deze koppeling ligt aan het begin, ergens onderweg, of aan het einde van de kabel. Dit beteekent, dat alle gelijksoortige koppelingen kunnen worden samengesteld tot één dergelijke koppeling aan het einde en daar door een even groote met tegengesteld teeken kunnen worden gecompenseerd.

2) In de kabel zelf is door zorgvuldige constructie der stergroepen de koppeling tusschen de beide stammen der groep gunstig gehouden. Voor een geringe koppeling met de stammen van de andere groepen wordt gezorgd doordat alle 12 groepen met een verschillende, onderling ondeelbare spoed zijn geslagen.

3) Teneinde bij den gelegden kabel zooveel mogelijk te zorgen, dat aan de onder 1) genoemde voorwaarde voldaan is, worden de lasschen tusschen de verschillende haspellengten (500 m) op speciale wijze gemaakt. In de eerste plaats worden om de andere lasch de groepen in cyclische volgorde verwisseld, waardoor verkregen wordt dat over de lengte van een versterkersectie alle stammen even veel malen in een bepaalde groep verloopen. Door deze maatregel worden eventueele kleine verschillen in demping en fase tusschen de circuits nagenoeg geheel weggewerkt. In de andere lasschen vindt geen verwisseling der groepen plaats, doch wel van de beide stammen in elke groep. Hierdoor worden eventueele verschillen tusschen de stammen genivelleerd, en tevens elke soort van systematische koppeling, die met de structuur der groep samenhangt, in de volgende kabellengte door eenzelfde met tegengesteld teeken gecompenseerd.

4) De op deze wijze verkregen kabelcircuits worden nu per versterkersectie nog tweemaal gebalanceerd t.o.v. alle andere. De eerste maal wordt de z.g. kruisingsmethode toegepast. Dit geschiedt door de versterkersectie in 4 ongeveer gelijke stukken te verdeelen en de drie lasschen die deze moeten verbinden voorloopig niet te maken. Bij het balanceeren worden de groepen in deze lasschen zoodanig met elkaar verbonden (met al of niet gekruiste stammen), dat een minimum aan overspreken ontstaat. Dit geschiedt door systematisch te probeeren en telkens een gunstig compromis te kiezen. Hierbij worden alleen kruisingen in de groep toegepast.

5. De geheel aan elkaar verbonden circuits van een versterkersectie die door de genoemde maatregelen al zeer gunstige tegenoverspreekeigenschappen gekregen hebben (zij zijn in den regel zonder meer bruikbaar tot *60 kHz*) worden tenslotte met behulp van kleine trimmercondensatoren (276 stuks voor 24 paren) nagebalanceerd tot op een restkoppeling van c.a. *2 pF*. de trimmers hebben max. *30 pF*.

Het loont de moeite te bedenken dat in 25 km kabel de onderlinge capaciteit van 2 draden van een stam rond *0,7 mF* bedraagt, een balanceering op *2 pF* wijst dus op een symmetrie in de orde van eenige honderdduizenden! Dat een dergelijke symmetrie in een zoo betrekkelijk ruwe constructie als tenslotte een papierkabel is, behouden kan blijven is een geweldig succes voor de huidige kabel-fabrikatiemethoden.

Als resultaat van deze maatregelen blijkt het gemakkelijk mogelijk te zijn om de kabelparen tot *100 kHz* te gebruiken. In een onlangs gereed gekomen versterkerssectie bedroeg de slechtste tegen-overspreekwaarde 9,3 neper, bij een gemiddelde boven de tien neper bij *100 kHz*. Deze cijfers doen verwachten, dat het betreden van de volgende *100 kHz* niet veraf meer zal zijn. Daarmede is de verbeterde multipelkabel zoodanig economisch geworden, dat hij n.m.l. door zijn andere eigenschappen voor telefonie een betere kans heeft dan de coaxiale kabel van de huidige constructie. Bij versterkerafstanden van 25 km. kan de demping der 1,3 mm. kabels tot c.a. *200 kHz* opgeheven worden, zoodat ook in dit opzicht geen ernstige moeilijkheden te verwachten zijn. In verband hiermede is er in ons net een tendens naar versterkerafstanden in de orde van 25 km.

De versterkers.

Een groote bijdrage tot de snelle ontwikkeling van de draaggolftelefonie op kabels is geleverd door de toepassing van negatieve terugkoppeling in de versterkers. Zooals bekend wordt hierdoor bereikt, dat de liniariteit en de constantheid sterk verbeterd worden. Het eerste is van het grootste belang, omdat het hierdoor mogelijk wordt om de verschillende kanalen op een paar zonder onderlinge storing gemeenschappelijk te versterken en dit zoo noodig vele malen te herhalen; het tweede maakt dat in lange verbindingen met vele versterkers geen gevaar te duchten is van veranderingen in versterkings-graad door veranderingen in voedingsspanningen, lampen enz. Beide

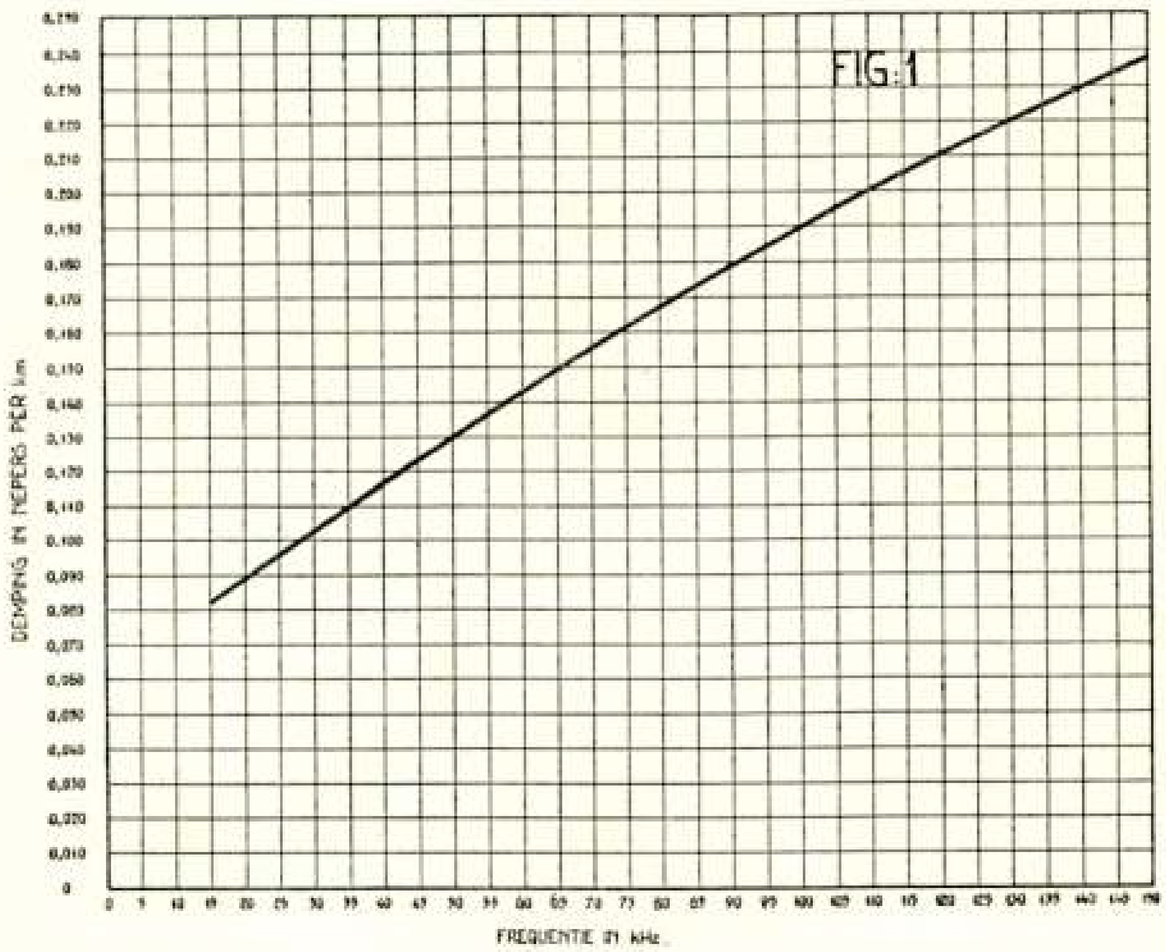
omstandigheden maken het dus mogelijk om vele malen in een verbinding te versterken.

De mate van versterking, die in één versterker mogelijk is, wordt eenerzijds beheerscht door de laagte van het niveau der spreekstroomen vóór de versterker, anderzijds door de grootte van het uitgaand niveau ná den versterker. Het eerste is afhankelijk van de stoorcondities, aangezien men moet zorgen voor een voldoende grootte van de verhouding signaal/geruisch. De stoorcondities kunnen in kabels en versterkers zoo gunstig worden, dat het thermisch ruischen vrijwel bepalend wordt voor het laagst toe te laten niveau.

In verband met de gewenschte verhouding signaal/geruisch beteekent dit voor lijnen met een groot aantal versterkers, dat het signaalvermogen voor een kanaal mag dalen tot c.a. 10^{-9} *W*. Bij gebruik van lampen van het ontvanger-eindlamp-type kan aan de uitgang het signaalvermogen voor een kanaal gemakkelijk 10^{-3} *W* bedragen, zoodat een versterking van 10^{-6} voor het vermogen of 10^{3} voor de spanning (60 db of c.a. *7* neper) regel is. Het loont weer even de moeite dat wij ons even realiseeren van welke beteekenis de op regelmatige afstanden herhaalde versterking van deze grootte is. Wanneer men immers een kabeldemping overeenkomende met die van slechts twee normale secties ineens wilde overbruggen, zou bij een ontvangniveau van 10^{-9} per kanaal een zendvermogen van 10^{3} *W* of *1 kW* noodig zijn! Bij de beschouwing van deze cijfers voor een afstand van 50 km. springt de betrekkelijke slechtheid van het transmissie-medium dat n.b. uit voor dit doel speciaal geconstrueerde geleiders bestaat wel duidelijk in het oog!

Het opheffen der demping stelt nog andere eischen aan de versterkers of de daarmede samenhangende hulpmiddelen. In de eerste plaats is de demping in sterke mate afhankelijk van de frequentie (zie fig. 1) en neemt in het gewenschte frequentie-gebied in den regel van c.a. 3 tot c.a. *7* neper toe. Er zijn twee methoden om deze moeilijkheid op te lossen; òf men voegt aan de lijn een netwerk toe, dat een zoodanig dempings-verloop heeft, dat het samen met de kabel een constante demping oplevert (een z.g. dempingseffenaar) en laat dan een versterker volgen die alle frequenties evenveel versterkt, òf men geeft de versterker een zoodanig verloop van de versterkingsgraad met de frequentie, dat deze voor alle frequenties juist gelijk wordt aan de kabeldemping. In het eerste geval daalt het niveau in alle kanalen na het doorloopen van lijn en effenaar tot eenzelfde lage

waarde, de verhouding signaal/geruisch zal dan (bij gelijke stoorcondities) voor alle kanalen hetzelfde zijn. In het tweede geval daalt het niveau in elk kanaal niet meer dan overeenkomt met de kabeldemping voor dat kanaal. Bij gelijke stoorcondities is de verhouding signaal/geruisch voor de lagere kanalen steeds gunstiger dan voor het hoogste. Dit brengt met zich mede, dat men zonder afbreuk te doen aan de lagere kanalen tot het uiterst toelaatbare kan gaan met het hoogste kanaal en dus ongestraft alles uit de kabel kan halen wat er in zit. Bij de eerste methode zouden in dit geval alle kanalen met deze extreme conditie moeten werken en dit noopt tot matiging.



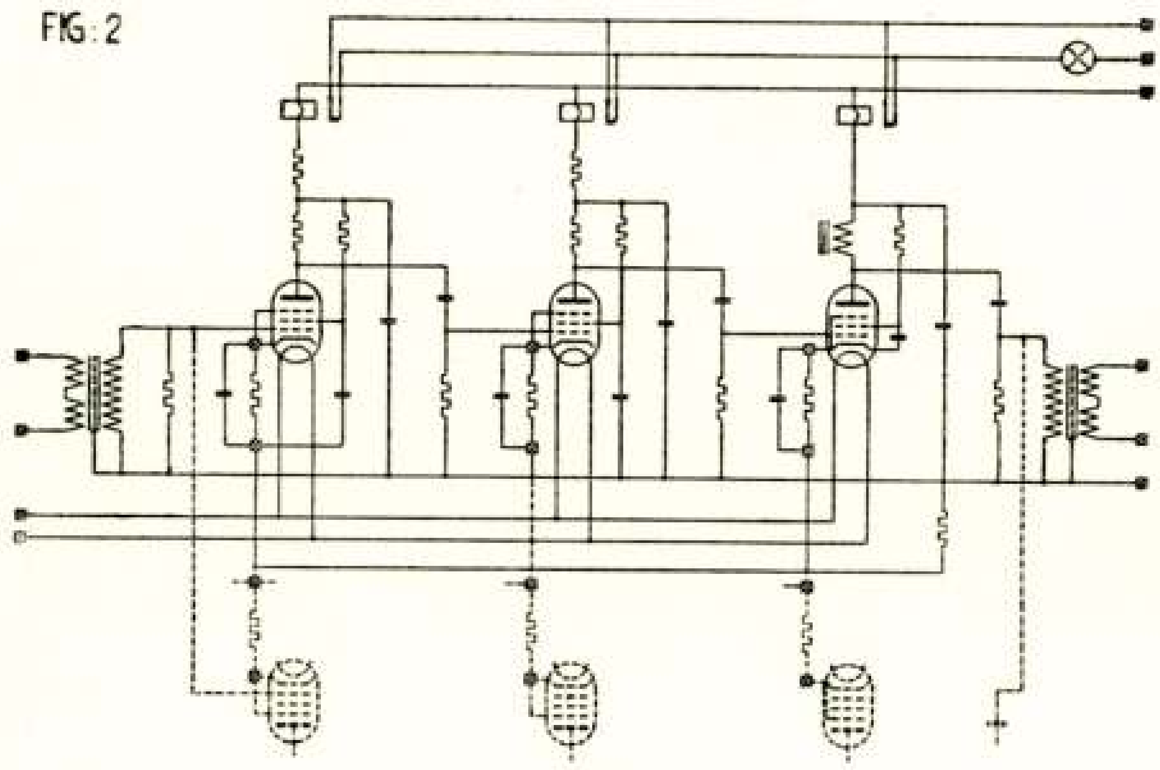
Er is nog een derde methode van werken, die toepassing vindt in gevallen van bijzonder moeilijk te overbruggen afstanden, b.v.: zeekabels, waarbij versterkers met oploopende versterkingsgraad worden gebruikt vóór de kabelsectie doorloopen wordt en aan de ontvangzijde met een constante versterkingsgraad wordt gewerkt. Hierbij komen aan het einde de signalen even sterk aan, dank zij het feit dat zij met verschillende sterkte waren uitgezonden. In dit geval treden aan de uitgang van de zendversterker de grootste amplituden op in de hoogste kanalen, terwijl in de andere gevallen de amplituden in de uitgang hetzelfde zijn.

In ons net is in het begin de eerste methode gevolgd, later is vanwege de daaraan verbonden voordeelen de tweede methode

toegepast. In fig. *2* is de schakeling van een versterker voor *8* tot *100 kHz* van de eerste soort weergegeven, fig. 3 geeft een foto ervan. Deze versterker is in twee gelijke helften uitgevoerd, bij storing in een der helften kan de andere het bedrijf onderhouden.

De moeilijkheden zijn hiermede intusschen niet uitgeput. De temperatuur der kabels varieert in ons land in den bodem in den loop van een jaar ongeveer van 0 tot 20^0 C.; de koperweerstand verandert hierdoor met 8$^0/_0$, de kabeldemping ondergaat hierdoor veranderingen in de orde van grootte van 0,3 neper per versterkersectie. Op een verbinding met meerdere secties zou deze verandering ontoelaatbaar groot worden, het is dus noodig om hierin te voorzien.

FIG: 2

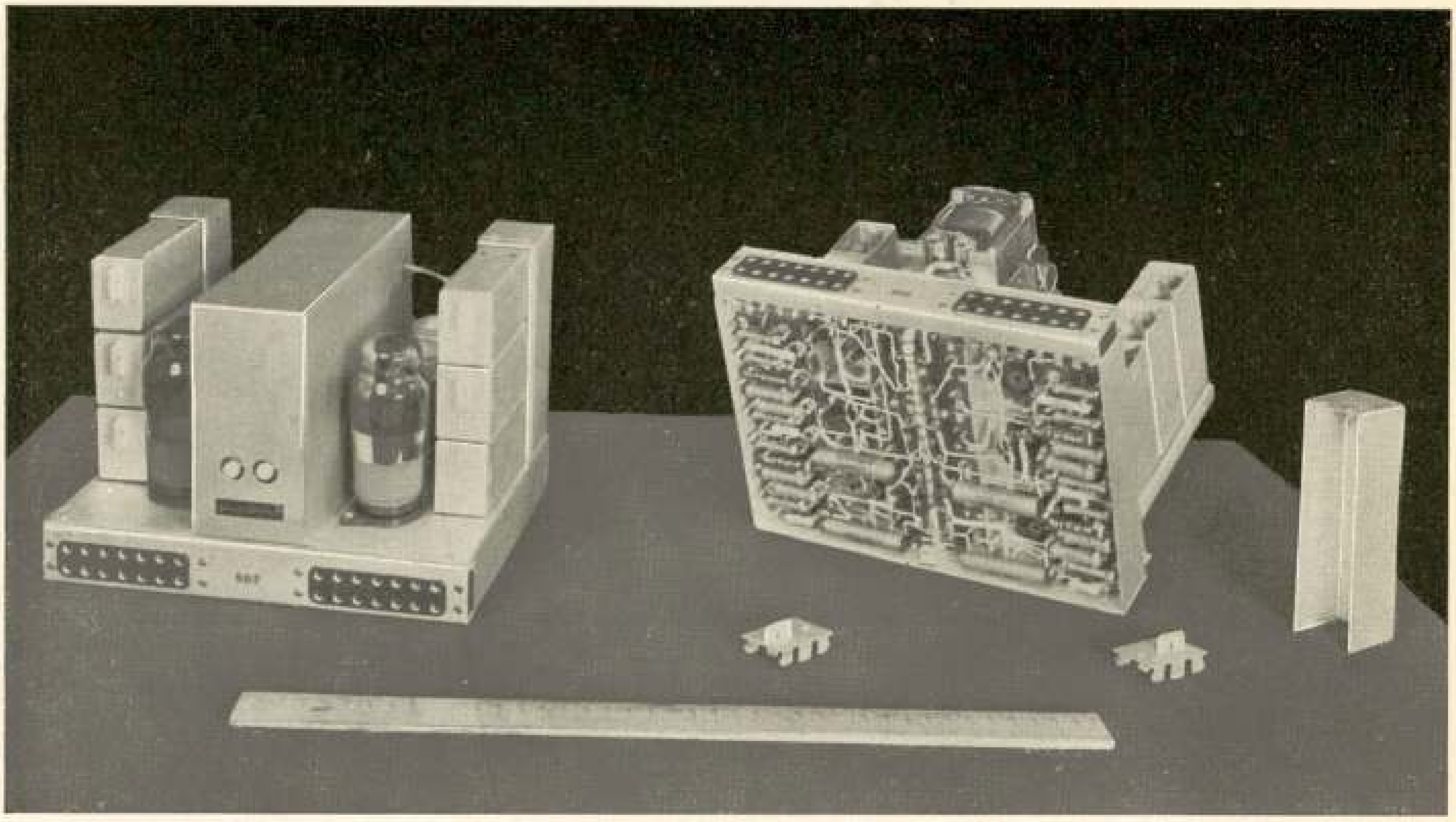


VERSTERKER VAN 8 TOT 100 kHz

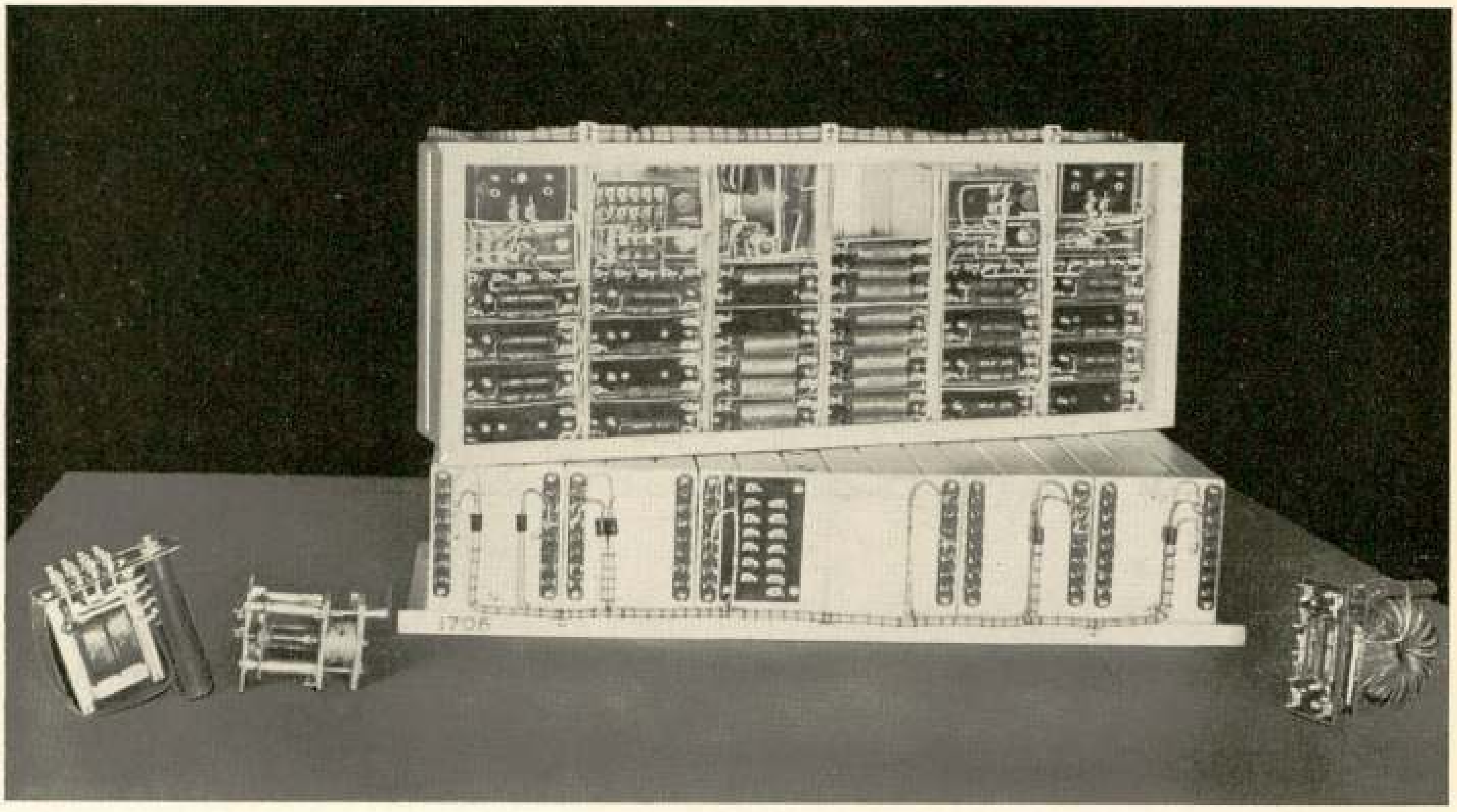
Dit kan geschieden door de versterkingsgraad de tegengestelde verandering te doen doorloopen, hetzij door een extra netwerk in cascade, hetzij door wijziging van de versterker zelf.

Het gros der afwijking kan hierdoor worden opgevangen, echter is deze variatie weer afhankelijk van de frequentie, zoodat de dempingseffenaars niet voor alle jaargetijden dezelfde kromme zouden mogen hebben. Deze verandering kan weder worden opgevangen netwerken die een tegengestelde verandering teweegbrengen. De verschillen zijn evenwel niet zoo groot, dat dit bij elke versterker noodig zou zijn, men kan ze na een zeker aantal versterkers opheffen.

Voor het gelijktijdig instellen van alle versterkers van een kabelsectie bij variaties tengevolge van de temperatuur is bij



Figuur 3.
Dubbele versterker voor de band *8—100 KHZ.*



Figuur 5.
Eindinstallatie. Links: zender. Rechts: ontvanger.

de in ons land gebruikte versterkers de volgende methode toegepast: er is in de versterkerschakeling een variabele weerstand noodig voor deze regeling; de verschillende weerstanden van alle versterkers moeten gelijktijdig varieeren, het is gewenscht de weerstanden in den versterker zelf aan te brengen om geen moeilijkheden met de schakeling te krijgen. Ten einde aan al deze voorwaarden te voldoen is voor de variabele weerstand een gloeilampje genomen, waarvan de temperatuur en daarmede de weerstand door een gelijkstroom gevarieerd wordt. Door de voedingsspanning van alle lampjes gelijktijdig te veranderen worden alle versterkers gelijktijdig geregeld. Voor het geval er een frequentie-afhankelijke regeling gewenscht is, kan de weerstand van het lampje via een passend netwerk met de schakeling verbonden worden. Het netwerk kan dan zoo gedimensioneerd worden, dat de weerstand van het lampje bij verschillende frequenties een verschillende uitwerking op de versterkingsgraad heeft.

De eind-apparatuur.

Wanneer met behulp van kabelcircuits en versterkers een afzonderlijke transmissielijn voor een breede frequentieband is opgebouwd voor elk der spreekrichtingen, is er nog een aanzienlijke hoeveelheid apparatuur noodig aan beide einden om een aantal afzonderlijke spreek-kanalen over deze lijn over te brengen, elk gesprek moet vanuit de normale laagfrequent-band in een zender naar het daarvoor bestemde deel van de breede band worden overgebracht en aan de andere zijde van deze plaats in het spectrum weer naar de normale laagfrequent-band worden teruggebracht in een ontvanger. Voor beide spreekrichtingen is aan elke zijde een zender en een ontvanger noodig, het geheel noemen we een eindinstallatie.

In de zenders moet de spraakband (*300* tot *3400 Hz*) gemoduleerd worden op de gewenschte draaggolf en deze en de ongewenschte zijband moeten onderdrukt worden, daar er met een zijband en onderdrukte draaggolf wordt gewerkt. In de ontvangers moet de ontvangen zijband worden afgezonderd, de draaggolf weer toegevoerd en het geheel weer gedemoduleerd worden.

In de in ons net toegepaste eind-installaties (zie fig. 4 en 5) vindt dit proces in de zenders zoowel als in de ontvangers in twee modulatietrappen plaats: De band van *300* tot *3400 Hz*

wordt eerst met *60 kHz* gemoduleerd, de zijband van *60,3* tot *63,4 kHz* wordt in het middelfrequentfilter uitgezeefd en deze band wordt in een tweede modulator met behulp van een hulpdraaggolf van $x + 60$ *kHz* verplaatst naar een zijband van de draaggolf x, Voor een kanaal, dat op de lijn b.v. tusschen *16* en *20 kHz* ligt (draaggolf *20 kHz*) is $x = 20$ en dus $x + 60 = 80$ *kHz*. Door 60,3 tot 63,4 met 80 te moduleeren ontstaat immers het verschil van *16,6* tot *19,7 kHz* (dit is de onderste zijband van *20 kHz*). Na deze modulatie is er voor de koppeling der verschillende zenders in ieder daarvan een LC kring aangebracht, die op het midden van de band, in dit geval dus op *18 kHz* is afgestemd. Deze LC kring beïnvloedt de gewenschte band nagenoeg niet, maar onderdrukt de spiegelfrequenties en de eventueele lek der hulpdraaggolf en maakt dat de verschillende zenders elkaar niet beïnvloeden. Aan de ontvangzijde

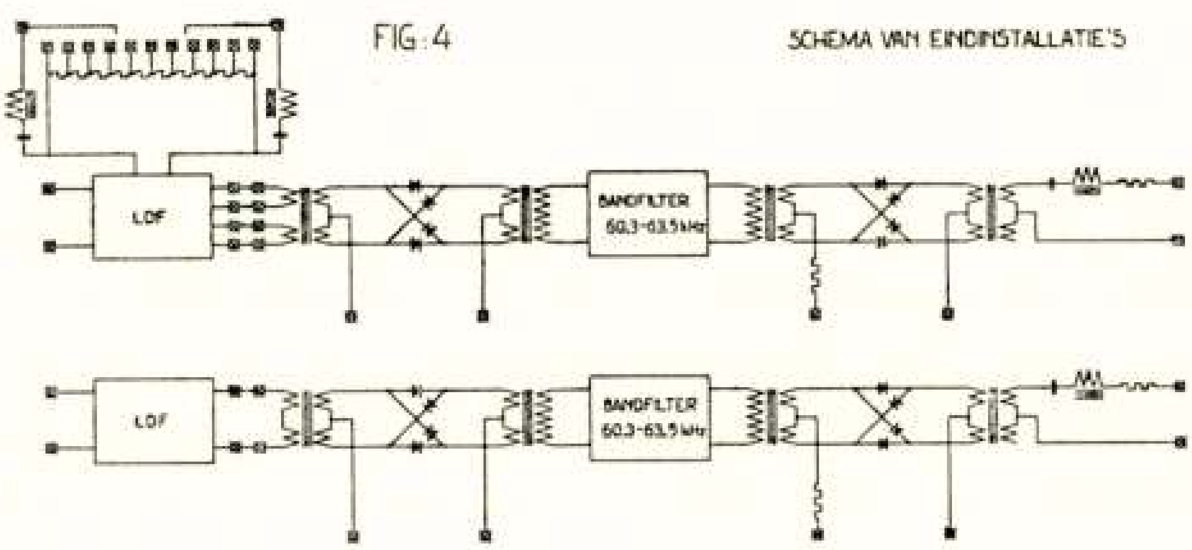


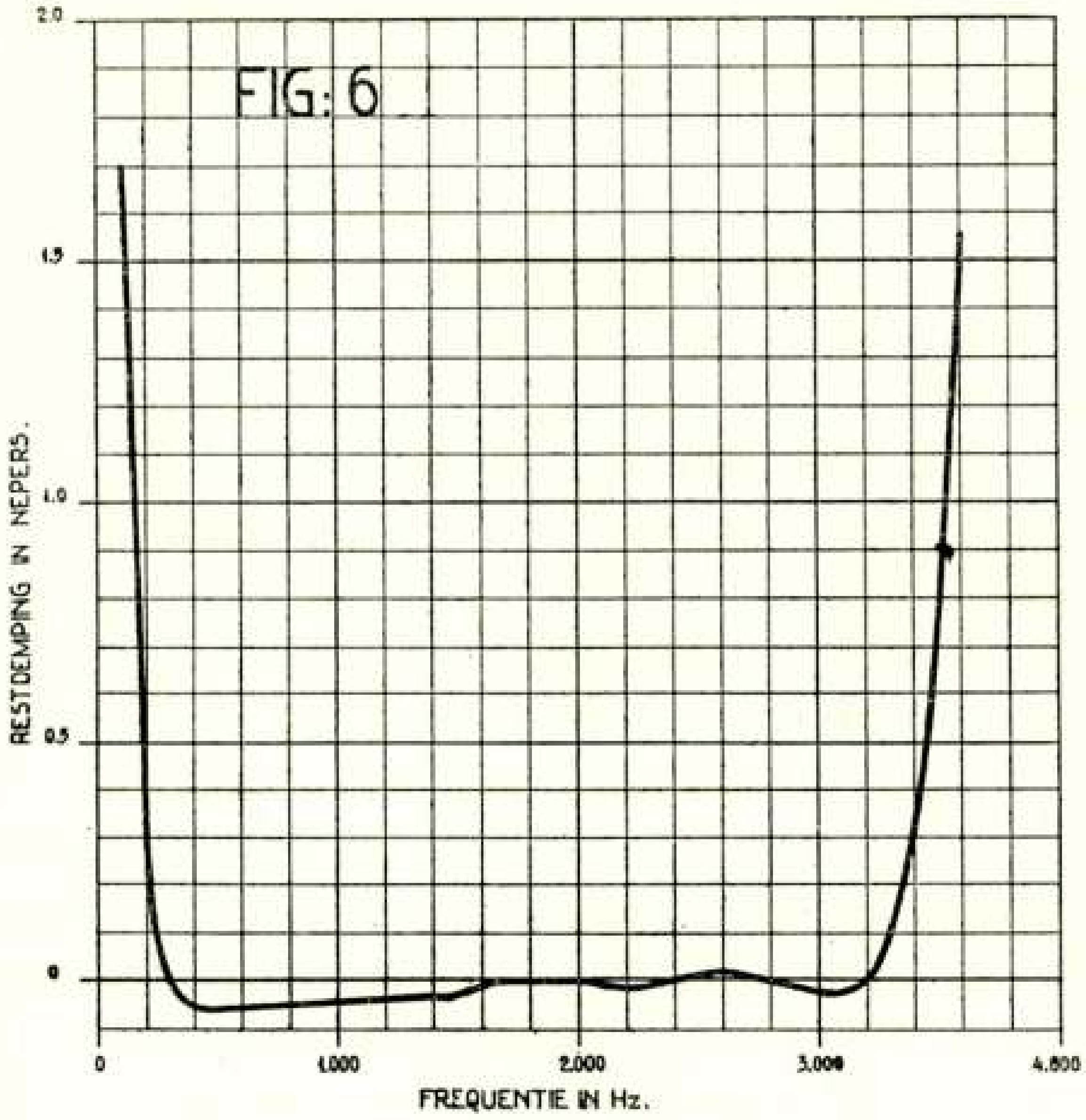
FIG: 4 SCHEMA VAN EINDINSTALLATIE'S

vindt geheel hetzelfde proces in omgekeerde volgorde plaats: de ontvangst van de onderste zijband van een draaggolf van x *kHz*; geschiedt na het doorloopen der LC kring door eerst te moduleeren met $x + 60$ *kHz*, waarbij als verschiltoon de bovenste zijband van *60 kHz* ontstaat, die in het middelfrequentfilter passeeren kan en daarna met behulp van *60 kHz* gedemoduleerd wordt tot de laagfrequent-band.

Deze vorm van dubbele modulatie is gekozen, omdat hierbij voor alle kanalen van nagenoeg geheel dezelfde apparatuur gebruik gemaakt kan worden. Er is per kanaal iets meer noodig dan bij enkele modulatie doch de eenheden zijn practisch alle aan elkaar gelijk. Het onderscheid naar het gewenschte kanaal komt in de eerste plaats tot uiting door het aanleggen van een andere hulpdraaggolf $x + 60$ *kHz*. Er is verder slechts verschil in de afstemcapaciteit der LC kring.

Als modulatoren worden cuprox of seleen-gelijkrichters in ringschakeling gebruikt. Behalve het reeds genoemde m.f.filter en de op het kanaal midden afgestemde kring, bevatten de ontvangers nog een laagdoorlaatfilter, dat de uit te zenden, resp. te ontvangen band ontdoet van ongewenschte frequenties (boven *3400 Hz*).

Fig. 6 geeft de restdempingskromme van een willekeurig kanaal.



Ligging der banden op de gemeenschappelijke lijn.

In het tot nu toe uitgevoerde deel van het net is gebruik gemaakt van de onderste zijbanden van de draaggolven van *12* tot *56 kHz* (zie fig. *7*). De beide laagste banden zijn niet



gebruikt om reeds genoemde redenen. Met eind-installaties van geheel dezelfde soort kunnen evenwel ook hoogere kanalen

worden gevormd, alleen zijn er door onvolkomenheden der *x + 60 kHz* modulatoren moeilijkheden om het kanaal, dat in de middelfrequentband valt, te gebruiken. In een aantal proefcircuits is boven de genoemde groep van 12 kanalen van *8* tot *56 kHz* nog een groep van 8 kanalen van *68* tot *100 kHz* gevormd, zoodat tusschen *8* en *100 kHz* in totaal 20 kanalen zijn gebruikt. Hoewel het natuurlijk mogelijk is om een aaneensluitende reeks van kanalen te produceeren met behulp van groepsmodulatie, zal waarschijnlijk toch op groote schaal van boven genoemde 20 kanalen gebruik worden gemaakt, omdat de inrichting ervan eenvoudiger is, vooral als het om een groot aantal circuits gaat.

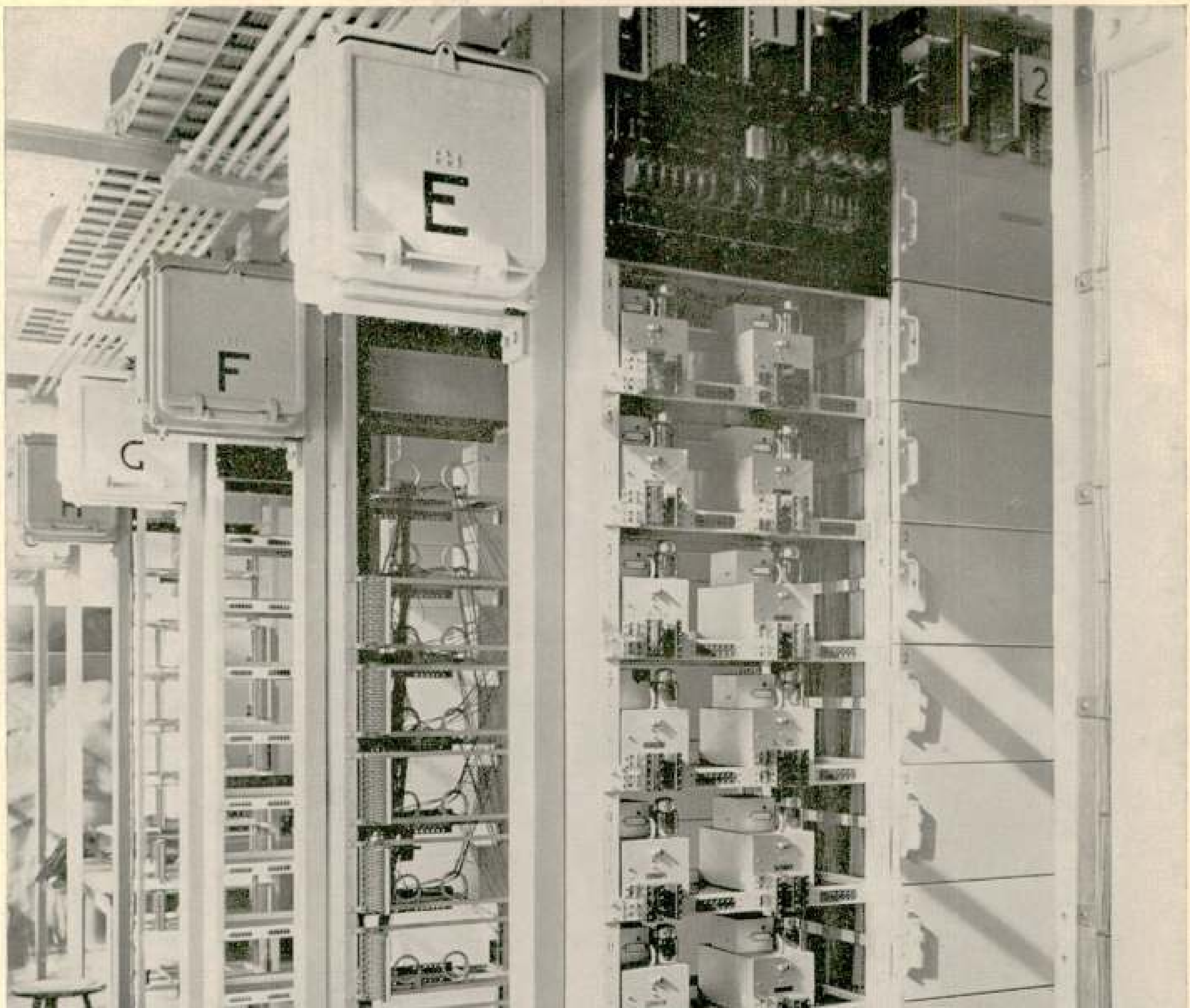
De draaggolf-voorziening.

De eindinstallaties hebben voor de eerste modulatie een voeding met *60 kHz*, voor de tweede met *x + 60 kHz*. Beide voedingen geschieden, voor een aantal eind-installaties gemeenschappelijk, uit generatoren die met behulp van een kwartskristal met geringe temperatuurcoefficient nauwkeurig op de juiste frequentie gehouden wordt. Het ligt in de bedoeling om op den duur er toe over te gaan om deze generatoren over het geheele land te synchroniseeren. In de stations is de geheele draaggolfvoorziening in duplo uitgevoerd met bewakings- en omschakelinrichtingen voor de bedrijfs- en de reservegeneratoren.

Teneinde een willekeurige eind-installatie van een willekeurige draaggolf *x + 60 kHz* te kunnen voorzien is een draaggolfverdeeler aangebracht, die het mogelijk maakt om met behulp van een kruisverbindingsdraad de eindinstallatie aan een generator te verbinden.

De opstelling in de stations.

De eind-installaties zijn ondergebracht in rekken van 2,73 m hoog, 54 cm breed en ± 45 cm diep. De rekken zijn aan voor- en achterzijde eender, elke zijde biedt plaats aan 20 eind-installaties, een rek dus aan 40 stuks. De overige apparatuur is in rekken van dezelfde afmetingen ondergebracht, de laagfrequentversterkers met 50 per rekhelft, de wekstroom of kies-ontvangers eveneens. De vorkschakelingen komen met 100 per rekhelft, bij de automatisch bedreven lijnen komen op dezelfde plaatsen de eindschakelingen van deze verbindingen. De versterkers voor



Figuur 8.
1e rij: rek met kwartsvocilatoren en eindinstallatierek.
2e rij: draaggolfverdeeler.

de breede frequentieband vinden plaats in een rek van dezelfde afmetingen, dat 40 van deze versterkers kan opnemen. De draaggolf-voorziening wordt in twee dergelijke rekken ondergebracht, één voor de generatoren en één voor de draaggolfverdeeler. De kabels, die van buiten komen, eindigen in eindsluitingen die tezamen met de lijntranslatoren, de dempingseffenaars en de inrichting van de compensatie van dempingsveranderingen met de temperatuur in een z.g. kabelrek zijn ondergebracht.

De volledige inrichting voor 400 spreek-verbindingen omvat dus, bij gebruik van 20 aders elk met 20 kanalen:

10 eind-installatie rekken,,
4 l.f.versterker rekken,
1 h.f.versterker rekken,
4 signaalontvanger rekken,
2 eind-rekken,
1 draaggolfverdeeler rek en
1 generatoren rek en
1 kabel rek.

In totaal dus 24 rekken van 54 cm breedte of een gezamelijke rekbreedte van rond 13 m.

De uitvoering der rekken is zoodanig, dat alle „levende" apparatuur, d.w.z. apparaten waarin lampen en voedingsspanningen voorkomen, er met behulp van stekers in wordt aangesloten, en dat deze er na het uitnemen van deze stekers uitgenomen kan worden en zoo noodig vervangen kan worden. De stekers zelf zijn zoodanig uitgevoerd, dat aan hun pennen onderhoudsmetingen kunnen worden uitgevoerd tijdens het bedrijf. De niet „levende" onderdeelen zijn ook uitwisselbaar, doch worden met gesoldeerde verbindingen aan hun rekken aangesloten.

De bekabeling tusschen de rekken geschiedt wat het h.f.gedeelte betreft met ééndubbeldraads afgeschermde kabeltjes, de impedantie der te transporteeren circuits is in het h.f.gedeelte stends rond *150 Ohm*, in het l.f.gedeelte *600 Ohm*, beide symmetrisch t.o.v. aarde. Door deze maatregel is bereikt dat er ongeveer aanpassing bestaat aan de natuurlijke impedantie der circuits, zoodat er geen abnormale verliezen in optreden.

Fig. 8 geeft een indruk van een station.

Sedert 1938 is met de invoering van draaggolf-telefonie in ons interlokale telefoonnet snel voortgegaan. Op het oogenblik zijn er reeds 14 van de 20 districts-centralen aan het draag-

golfnet aangesloten en dit aantal zal spoedig nog toenemen. Er zijn in dit net thans rond 800 spreekverbindingen in bedrijf met een gezamenlijke lengte van c.a. 80.000 km.

Aan de totstandkoming van dit werk hebben velen in het bedrijf hun bijdrage geleverd, ik kan hun namen moeilijk alle noemen, doch zou een uitzondering willen maken voor Ir. Stieltjes, die ons bedrijf inmiddels heeft verlaten, maar die een belangrijk aandeel heeft gehad in het wetenschappelijke werk dat deze ontwikkeling tot achtergrond heeft gehad. Ten slotte moge ik mijn dank betuigen aan de bedrijfsleiding en aan de Ned. Standard Electric Co. voor het verstrekken van en de toestemming tot publicatie van eenige foto's.

DISCUSSIE.

Ir. van Dijl vraagt waarom in een der M.F. modulatoren een weerstand aangebracht is in het sleutelcircuit?

Ir. Bast antwoordt hierop: Deze weerstand dient om koppeling via den generator te voorkomen. Bij de *60 kHz* modulatoren is dit niet noodzakelijk gebleken, dit komt doordat de niveau-verschillen daar niet zoo groot zijn.

Ir. de Lussanet de la Sablonière: In het schema tegenkoppeling-versterker geschiedt de tegenkoppeling door weerstand doorloopen door anodestroom eindlamp. Door dezen weerstand stroomt echter ook de anodestroom van de voorlaatste lamp.

Geeft dit geen meekoppeling voor de laatste trap?

B.: Deze meekoppeling is zeer gering — de terugkoppelweerstand heeft slechts enkele *Ohms* — en wordt verre overstemd door de tegenkoppeling.

Ir. Numans: Is er een reden, waarom de *60 kHz*-frequentie niet over den kabel wordt rondgezonden als basis van synchronisatie van alle *60 kHz* oscillatoren?

B.: Het ligt inderdaad in de bedoeling om de *60 kHz* in het land te gebruiken voor synchronisatie. Bij de eerst in te richten trajecten waren er echter verschillende die hiervoor een te groote demping hadden, zoodat men er niet aanstonds mee kon beginnen.

Ir. de Jong: Wat is bij het zend I.Fr.deel de beteekenis van de 2 kringen en den potentiometer?

B.: De spanningsdeeler dient voor het verkrijgen van de juiste demping voor den zender. Door dezen gedeeltelijk met een L.C.kring te overbruggen kan compensatie van de lineaire vervorming in het filter verkregen worden.

Eén kring is afgestemd nabij *3.5 kHz*, de andere nabij *200 Hz*.

Tolk: Waarom wijzigt zich de verhouding signaal tegenover ruisch-

niveau bij toepassing van dempingspads bij lagere frequentiebanden in ongunstiger mate dan bij de hoogere banden? Ruisch komt niet uit den kabel maar uit thermische effecten van de versterkerlampen voort.

B.: De dempingsnetwerken vergrooten de demping in de lagere kanalen méér en doen dus hiervoor het signaalniveau dalen.

Het thermische ruischen ontstaat niet alleen in den kabel doch komt ook uit de ingangsimpedantie voort.

De bijdrage der lampen kan klein gehouden worden t.o.v. het weerstandsruischen der ingang.

Ir. Weijers: Hoe groot is de overspreekdemping tusschen twee gesprekkanalen uit eenzelfde groep van 12 gesprekken?

B.: Dit is in den regel onverstaanbaar en in de orde van grootte van ongeveer 1‰.

Ir. Blok: Is de dissortie bij dubbele modulatie ongunstiger dan bij andere modulatie?

B.: De niet-lineaire vervorming is bij elke modulatie zeer gering en in het bijzonder bij een trap waar en relatief zeer smalle wordt omgezet. Van eenig verschil in dit opzicht tusschen enkele en dubbele modulatie zal daarom praktisch niets te merken zijn.

Ir. Blok: Van welke orde van grootte is de tegenkoppeling in den zendversterker?

B.: 50 à 100 maal.

Ir. Six: In de lijnversterkers is stroomtegenkoppeling toegepast waardoor de versterker een hoogen inwendigen weerstand verkrijgt. Om dezen aan dezen aan de lijnimpedantie aan te passen wordt de helft van de energie verloren. Heeft het daarom geen voordeelen om door toepassing van een combinatie van stroom en spanningstegenkoppeling de aanpassing aan de lijn te verkrijgen?

B.: Ja, voor een vlakken versterker zijn daaraan zeker voordeelen verbonden. Voor de versterkers met oploopende dempingskarakteristiek is het evenwel veel moeilijker om dit te verwezenlijken.

OVER DE TECHNIEK DER ELECTROPHYSIOLOGIE

door

J. BIJTEL

De electrophysiologie, vroeger wel de leer der dierlijke electriciteit genaamd, begint haar geschiedenis in het jaar 1790 met de bekende waarneming van Galvani. De ontvelde achterpooten van een kikvorsch, opgehangen met een koperen haak aan een ijzeren statief, raakten het ijzer en de spieren trokken zich samen. Ten onrechte meende Galvani bij dit verschijnsel te doen te hebben met electrische spanningen, wier ontwikkeling een functie zou zijn van het levende organisme. De opvatting van Volta, die ons hiermede het element, combinatie van metalen en electrolyt, als stroombron bekend maakte, bleek de juiste. Toch was de gedachte van Galvani, dat in het organisme electrische spanningen, gebonden aan levensverrichtingen, kunnen optreden wel juist. Galvani toonde dit aan met een andere proef. Van een z.g. spierzenuwpraeparaat, een uitgesneden spier, waaraan de bijbehoorende motorische zenuw verbonden is gelaten, legde hij het afgesneden zenuweinde zonder tusschenkomst van metalen tegen de spier, die hierop samentrok. De potentiaalverschillen die optreden tusschen een wondvlakte en het normale weefsel zouden hier de stroombron zijn. Men houde hierbij in het oog, dat dergelijke praeparaten van lagere dieren onder gunstige omstandigheden langen tijd den dood van het dier als geheel overleven.

Toen omstreeks 1825 gevoelige galvanometers in gebruik kwamen (Nobili) werden al spoedig de verschijnselen der z.g. dierlijke electriciteit verder onderzocht en gemeten. Omstreeks het midden en verder in de tweede helft van de vorige eeuw werden door verschillende onderzoekers, waaronder wij noemen Dubois Reymond en Hermann, de nog steeds geldende beginselen der electrophysiologie vastgelegd. Bijzonderheden over in die dagen verkondigde theorieën en meenings-

verschillen tusschen de verschillende onderzoekers kunnen wij stilzwijgend voorbijgaan. Zij hebben hun actualiteit verloren. De verbeteringen in de techniek — capillairelectrometer en vervolgens snaargalvanometer en oscillographen — hebben de kennis der electrophysiologische verschijnselen belangrijk bevorderd.

De meting der zwakke electrische verschijnselen stelde hooge eischen aan de techniek in een tijd, waarin deze techniek zelve nog in de laboratoria moest worden ontwikkeld. Onpolariseerbare electroden, isolatie en vermijding van inductie, dreunvrije opstelling der apparaten, leverden tallooze moeilijkheden, die eerst geleidelijk werden overwonnen. De toepassing van zeer dunne snaren in den snaargalvanometer stelde bijzondere eischen aan de optiek. Het wil ons wel eens voorkomen, dat door latere onderzoekers de beteekenis van een juiste techniek voor de betrouwbaarheid der resultaten niet zoo hoog wordt aangeslagen als door de pioniers op dit gebied.

De electrische verschijnselen, die zich in het levende organisme voordoen, kunnen wij in twee groepen onderbrengen:

a. de z.g. demarcatiestroomen, die hun ontstaan danken aan potentiaalverschillen tusschen twee punten ter weerszijden van de demarcatielijn tusschen gezond, levend en verwond afstervend weefsel. Deze zijn ook wel ruststroomen genoemd.
b. de z.g. actiestroomen, die een gevolg zijn van potentiaalverschillen tusschen een punt in het gebied, waar een orgaan in specifieke werking is en een punt in het gebied, dat in rust is.

a. Snijden wij een overlevende spier van een lager dier door en plaatsen wij één onpoliseerbare electrode tegen de sneevlakte en een tweede tegen de onbeschadigde [1]) oppervlakte, dan zal bij sluiting van de kring er een stroom loopen van de laatstgenoemde naar de sneevlakte. De afstervende of verwonde deelen zijn dus negatief ten opzichte van het gezonde weefsel.

b. Plaatsen wij tegen een spier twee onpoliseerbare electroden op eenigen afstand van elkander, dan zal bij prikkeling van b.v. de nog aan de spier bevestigde zenuw een contractiegolf over de spiervezelen zich uitbreiden, zoodat na elkander de eene en de andere electrode door deze golf wordt gepasseerd. Bij sluiting van de stroomkring zal er een stroom loopen

---

[1]) Van deze spieren is de vliezige mantel meestal slechts zeer los met de omgeving verbonden, zoodat bij het uitpraepareeren hiervan nagenoeg geen verwonding ontstaat.

naar de electrode, die door de contractiegolf wordt gepasseerd. Indien er dus een reeks contractiegolven na elkander over de spier loopt, zooals het geval is bij de natuurlijke samentrekking van willekeurige spieren in het intacte levende lichaam, dan zal een wisselstroom ontstaan, waarbij beurtelings ieder der electroden negatief en positief is, een z.g. diphasische actiestroom, die men zich intusschen niet als zuiver sinusoïdaal voorstelle. Neemt men nu een doorgesneden spier, waaraan zich aan de intacte zijde nog een zenuw bevindt, en plaatst men de eene electrode tegen de sneevlakte en de andere op de onbeschadigde oppervlakte. dan zal alleen de laatste electronegatief worden, telkens als de contractiegolf passeert; het afstervende deel functionneert niet meer. De actiestroom is dan tegengesteld gericht aan de demarcatiestroom, die immers naar de sneevlakte gericht is. De demarcatiestroom wordt, telkens als een contractiegolf de electrode op de gezonde spiermantel passeert, verzwakt. Men noemt dit de negatieve schommeling van de demarcatiestroom of de monophasische actiestroom.

Wij namen de willekeurige spier als voorbeeld, omdat de verhoudingen hierbij het eenvoudigst zijn. Een zenuwstroom geeft dezelfde verschijnselen minder sterk bij geleiding van prikkels, wat zijn specifieke functie is. De prikkelgolf komt dan in de plaats van de contractiegolf van de spier. Voor andere organen geldt in beginsel hetzelfde, doch veelal zijn de verhoudingen dan wat meer gecompliceerd. Bij stroomafleiding van de lichaamsoppervlakte heeft men te rekenen met potentiaalverschillen, die gemeenlijk tusschen twee punten van de huid bestaan (functie der huidklieren o.a.).

Een merkwaardig effect geeft de hartspier. Het hart bestaat uit verschillende afdeelingen, de voorkamers en de kamers, die zich rhythmisch na elkander samentrekken, de voorkamers gelijk en de kamers gelijk. Leidt men nu van het hart, waarover volgens een vast schema telkens weer een contractiegolf loopt, de actiestroom af, dan neemt men een reeks stroomschommelingen waar, die het z.g. electrocardiogram vormen. De verschillende toppen duidt men met letters aan: P voor de voorkamertop, QRS voor een complex schommelingen aan het begin en T voor een schommeling aan het einde der kamersamentrekking. Afwijkingen in het rhythme en in het verloop van de contractiegolf laten zich in het electrocardiogram gemakkelijk onderkennen, zoodat het al spoedig groote klinische beteekenis kreeg.

Voor de studie van de werking der spieren en zenuwen is

uiteraard de registreering der actiestroomen mede een belangrijk hulpmiddel.

Wij willen ons voorloopig houden aan de klassieke opvatting, die in de actiestroomen een begeleidend verschijnsel van de functie der organen ziet, dat onveranderlijk aan de functie is gebonden en van deze dus een juist beeld geeft.

In den laatsten tijd komen herhaaldelijk opvattingen naar voren, die aan de actiestroomen, in het bijzonder aan die der zenuwen een meer wezenlijke beteekenis voor de functie toekennen in dien zin, dat de prikkelgolf, die door een zenuw wordt geleid, in wezen niets dan een electrisch verschijnsel zou zijn. Wij raken hiermede de kern van het levensvraagstuk en verdere beschouwingen vallen buiten het bestek van dit artikel. Wij volstaan met op te merken dat naar onze meening de functie van levende organen nimmer als een eenvoudig of enkelvoudig physico-chemisch proces kan worden opgevat. Dit doet intusschen niets af aan de beteekenis van de actiestroomen voor de kennis van het verloop der levensprocessen.

Aangezien de actiestroomen in het algemeen variabele processen volgen, zullen de registreerapparaten voldoend snelle aanwijzingen moeten kunnen geven. Voor de directe meetapparaten, waarmede wij bedoelen die apparaten, die zonder tusschenkomst van versterkers worden gebruikt, is de snaargalvanometer wel het hulpmiddel bij uitnemendheid in de physiologie. Verschillende electrophysiologische verschijnselen kunnen hiermede met aanzienlijke nauwkeurigheid worden bepaald. Het electrocardiogram b.v. geeft in het geheel geen moeilijkheden. De potentiaalverschillen varieeren in sterkte van 0 tot soms enkele millivolts, de kleinste waarde eener periode kunnen wij stellen op 2×10^{-2} *sec.* om de gedachten te bepalen. De voor experimenteele en klinische doeleinden gewenschte gevoeligheid wordt verkregen bij een snaarspanning, waarbij alle toppen onvervormd worden weergegeven. Bezwaren doen zich echter gelden, wanneer zeer zwakke electrische verschijnselen moeten worden geregistreerd, b.v. zenuwstroomen. De snaar moet dan worden ontspannen om haar op de vereischte gevoeligheid te brengen, waarbij zij aan snelheid inboet. Een goed beeld hiervan vindt men in een publicatie van wijlen Prof. Einthoven over de stroomen afgeleid van den nervus vagus, een zenuwstam, die tot het z.g. vegetatieve zenuwstelsel behoort. Het vegetatieve zenuwstelsel voorziet de inwendige organen en is niet aan den invloed van den wil onderworpen, noch geeft het direct

bewuste indrukken. Het bestaat uit twee onderdeelen, het sympathische en het parasympathische stelsel, welke stelsels door een ingewikkelde samenwerking de functie der inwendige organen regelen. Voor zijn studie beschouwde Einthoven den genoemden tot het parasympathische stelsel behoorenden zenuwstam, welke komende hoog uit het ruggemerg zijn vertakkingen o.a. zendt naar hart en longen. Langs deze takken loopen door bepaalde vezelbundels ook prikkels terug vanaf het hart en de longen bij iederen hartslag en bij iedere adembeweging naar de centra van het vegetatieve zenuwstelsel, wat van beteekenis is voor de coördinatie dezer functies. Snijdt men nu bij een genarcotiseerden hond aan de hals dezen zenuwstam door, dan kan men van het perifere, d.i. het van hart en longen komende deel, het electrogram afleiden door één electrode te plaatsen tegen de sneevlakte en één op den stam zelf. Men krijgt dan allereerst een demarcatiestroom, die gecompenseerd wordt door een tegenelectromotorische kracht aan te brengen en verder z.g. negatieve schommelingen bij iedere adembeweging en bij iederen hartslag. De adembewegingen en de hartslagen geven potentiaalverschillen van dezelfde orde van grootte, nl. *15—20* mikrovolts.

De frequentie van de hartslagen is ongeveer *4* maal die der adembewegingen. Stelt men nu de snaar in op een zoodanige gevoeligheid, dat de langzame ademhalingsschommelingen voldoend groote uitslagen geven voor hun bestudeering vereischt, dan is de snaarbeweging zoo traag, dat schommelingen van den hartslag van hoogere frequentie worden gedempt. Einthoven heeft getracht aan dergelijke bezwaren tegemoet te komen door de constructie van een galvanometer, waarbij zich de snaar in een luchtledige ruimte bevindt.

Van bijzondere beteekenis zijn de electrische verschijnselen van de gehoorzenuw. Naar de — men zou geneigd zijn te zeggen klassieke opvattingen, al dateeren zij van hoogstens ruim een eeuw geleden — geleidt een zenuw prikkels van het centrale zenuwstelsel naar verschillende organen of wel omgekeerd vanaf de zintuigelementen naar het centrale zenuwstelsel als een eigen functie, die onafhankelijk is van hetgeen aan begin- of eindpunt geschiedt. Een prikkelgolf door een motorische zenuw zou in wezen gelijk zijn aan een prikkelgolf door een zintuigzenuw. Ieder weefsel, iedere cel is prikkelbaar, d.w.z. reageert met de specifieke functie op van buiten komende prikkels. Een prikkel is in het algemeen een plotselinge — althans

een binnen een zekeren korten tijd tot stand komende verandering in de uitwendige omstandigheden, dus een electrische stroomstoot, een plotselinge temperatuursverandering, een mechanische of chemische invloed. Kunstmatige prikkels brengt men voor experimenteele doeleinden het eenvoudigst aan met behulp van electrische stroomen. Aldus zijn ook de zenuwvezelen zelfstandig prikkelbaar. De op een uitwendigen prikkel door de zenuw vloeiende prikkelgolf geeft geheel hetzelfde effect als een natuurlijke prikkeling vanuit het centrale zenuwstelsel of vanuit een zintuig, qualitatief geheel onafhankelijk van de wijze, waarop de kunstmatige prikkel wordt aangebracht. Men spreekt van ouds van het beginsel of van de wet der zelfstandige prikkelbaarheid en van het onveranderlijk gevolg, Dit nu brengt mede, dat het proces, dat in de zenuwvezel zelve zich afspeelt, qualitatief niet de directe afspiegeling is van hetgeen b.v. bij een zintuigzenuw aan de periferie in het opvangend orgaan wordt verwerkt. In uiterste consequentie zou dus het proces in de gezichtszenuw hetzelfde moeten zijn als in de gehoorzenuw, terwijl toch in het oog worden opgevangen aethertrillingen van eenige malen 10^{14} *Hertz* en in het oor luchttrillingen van ongeveer *40—15000 Hertz*.Tevens brengt dit beginsel mede, dat in het perifere zintuig de opgevangen prikkel wordt geanalyseerd. Voor het gehoorapparaat heeft men zich deze perifere analyse op verschillende wijzen gedacht. Wij noemen de resonantietheorie van Helmholtz, de theorieën van Ewald, Hurst, Meyer, ter Kuile en de opvattingen van von Békésy zonder volledig te zijn. Geen dezer beschouwingen echter voldoet geheel en het is dan ook niet uitgebleven, dat zich een geheel andere beschouwingswijze ontwikkelde, nl. van Rutherford, die de analytische functie naar het centrale zenuwstelsel verlegde. Dan echter moet de gehoorzenuw het beeld van den geluidsindruk als zoodanig overbrengen en moeten de prikkelgolven door de zenuw gelijkvormig zijn aan de geluidstrillingen. Dit kan slechts tot op zekere hoogte, aangezien de zenuwvezel niet meer dan ongeveer 1000 prikkels per seconde kan overbrengen. Voor hoogere frequenties neemt men dan samenwerking van meerdere vezels aan. Wij willen hierop niet verder ingaan, doch volstaan met er op te wijzen, dat het hier gaat om problemen van groote beteekenis, welker oplossing men met behulp van de registratie der actiestroomen van de zenuwen tracht te benaderen. Nu beschikken wij niet over een meetapparaat, dat electrische tril-

lingen van de frequentie der lichttrillingen kan registreeren, doch de bij het gehoorapparaat voorkomende frequenties liggen wel binnen het bereik onzer werktuigen. Zoo bestaat er sinds vele jaren voor de actiestroomen van de gehoorzenuw groote belangstelling. Een moeilijkheid hierbij is, dat de gehoorzenuw slechts zeer kort is en voor een deel nog door een kanaal in het rotsbeen loopt, zoodat men niet als bij den nervus vagus een vrij gepraepareerden zenuwstam heeft, waarop men de beide electroden kan plaatsen. Ook zijn de frequenties van dien aard, dat men bij deze zwakke electrische verschijnselen — het gaat weer om eenige microvolts — niet direct van den snaargalvanometer gebruik kan maken. Algemeen gebruikt men dan hierbij ook versterkers. Wij beschikken slechts over een enkele mededeeling van Hinnen [1]) over de registratie dezer stroomen zonder versterkers met behulp van een vacuumgalvanometer. In het algemeen zijn deze onderzoekingen niet in overeenstemming met de eischen, die de electrophysiologie stelt. De stroomafleiding geschiedt door een metalen haakje om de zenuw te leggen, een niet onpoliseerbare electrode dus, en een tweede electrode elders in het dier aan te brengen, hetzij in de hersenmassa, hetzij in een naburige spier.

Het is nu bij deze proeven gebleken, dat men mede registreert een electrisch effect, dat aan het slakkenhuis is gebonden. Men noemt dit het cochlea-effect. Het zou moeten berusten op een ons niet nader bekende physische werking in het slakkenhuis, die men wel als microfoonwerking aanduidt. Sommige onderzoekers meenen in de op dergelijke wijze verkregen registraties het cochlea-effect en de actiestroom van de gehoorzenuw naast elkander te onderkennen en deze beide tot op zekere hoogte te scheiden.

Men ziet, dat al zouden wij beschikken over de gewenschte registreerapparaten, de moeilijkheden nog lang niet alle zijn opgelost.

Intusschen brengt de opzet van dit artikel slechts mede de electrotechnische eischen nader te formuleeren. Dit doende wenschen physiologen een registreerapparaat, dat onvervormd weergeeft potentiaalschommelingen vanaf 10^{-6} *Volt* bij frequenties van $0 - 10^{15}$ *Hertz*. Mochten deze waarden bedragen 10^{-5} *Volt* en $0 - 10^{4}$ *Hertz*, dan zou voorloopig reeds veel zijn bereikt.

---

[1]) Verslag der 69e vergadering der Keel- Neus- Oorheelkunde Vereeniging (1940). Ned. tijdschr. v. Geneesk., 84, 4335 (1940).

DISCUSSIE.

Ir. Heeroma: Hoe stelt men zich het mechanisme voor van de microfoonwerking bij aansluiting van een versterker op het slakkenhuis?

Dr. Bijtel: Een juiste voorstelling van de mikrofoonwerking heeft men niet. Men noemt het aldus eenigszins vergelijkenderwijze.

Ir. Huydts: Kan Dr. Bijtel nader opgeven de eischen van versterkerapparatuur als bedoeld voor de beschreven onderzoekingen?

Naar mijn weten heeft de versterkertechniek in dat opzicht practisch al heel wat gepresteerd.

In een Amerikaansche catalogus van 1938 vond ik de beschrijving van uitvoerige apparatuur ontwikkeld voor biologische onderzoekingen.

In het Radiolaboratorium te Delft werd eveneens apparatuur ontwikkeld voor het histologisch laboratorium te Leiden in samenwerking met Prof. S. T. Bok waaraan hooge eischen ten grondslag lagen voor wat betreft de gevoeligheid en de onderste grensfrequentie. (Respectievelijk enkele μV voor volledige uitsturing van een kathodestraal buis en grensfrequentie beneden *1 Hertz*).

Dr. B.: Stellig is de techniek ver gevorderd. Er zijn echter bij de toepassing op biologisch gebied nog moeilijkheden.

Ir. Veldhuis: Is reeds gebleken dat de electrische verschijnselen in zenuwen in oorzakelijk verband staan met de actie resp. prikkeling van de spier? Of kan het een bijverschijnsel zijn?

Dr. B.: M.i. moet worden vastgehouden aan de oude opvatting, dat de electrische verschijnselen een begeleidend verschijnsel van het prikkelingsproces zijn.

GELIJKSTROOMVERSTERKERS

door

J. PIKET

Voordracht gehouden voor het Ned. Radio Genootschap op 6 Februari 1942.

Het is vaak noodzakelijk verschillende physiologische spanningen te versterken voor ze kunnen worden geregistreerd. De eischen, die aan de versterking moeten worden gesteld, hangen af van de gebruikte registratie-apparatuur, de grootte en het frequentie-spectrum van de physiologische spanningen.

Registratie-apparatuur.

Voor het registreeren neemt de snaargalvanometer nog steeds een eervolle plaats in, voornamelijk door zijn groote gevoeligheid, deze kan voor een practisch goed hanteerbaren galvanometer met snaar van *10,000 Ohm* opgevoerd worden tot 10 cm uitslag op het fotografisch papier voor *1 mV* op de snaar, beantwoordend aan 10^{-7} *Amp.* Daardoor kunnen vele physiologische verschijnselen (spieractiestroomen), die spanningen opleveren van *100 μV* of meer, nog rechtstreeks ermee waargenomen worden, wat de bediening van de apparatuur zeer vereenvoudigt. Nadeelen zijn de kwetsbaarheid voor overbelasting, de beperkte vervoersmogelijkheid (vooral voor de zeer gevoelige exemplaren), en voor sommige toepassingen de frequentiekarakteristiek. Deze valt af, afhankelijk van de gevoeligheid, boven frequenties van 20 tot 200 trillingen per sec., door de mechanische traagheid van de snaar. Verder kan, ofschoon de eigenlijke galvanometer ook voor zeer langzaam veranderende stroomen foutloos aanwijst, een vervorming ontstaan bij de laagste frequenties doordat de altijd nog lage snaarweerstand van *10 k-Ohm* een te lage aanpassing is voor het systeem van inwendigen weerstand en huidcapaciteit. Voor gemakkelijker

transportabele toestellen wordt veel gebruik gemaakt van lusoscillografen. Deze zijn echter tevens minder gevoelig, zoodat het direct registreeren van physiologische spanningen zonder versterker hierbij uitgesloten is. Ook de gevoeligheid voor overbelasting (ofschoon geringer dan voor den snaargalvanometer) en de beperkte snelheid blijven hier als nadeelen bestaan. De derde registreermogelijkheid, de kathodestraaloscillograaf, verheugt zich in een toenemende populariteit. Zijn voordeelen zijn: overbelasting is onmogelijk, de gevoeligheid is voor frequenties van 0 tot ver buiten het physiologisch gebied constant, terwijl het als aangename bijkomstigheid zeer eenvoudig is met behulp van een nalichtend scherm den krommevorm voor langzaam veranderende spanningen visueel te bestudeeren. Naneelen zijn de geringe gevoeligheid en de hooge voedingsspanningen voor den oscillograaf (minstens *500 V*), Dit laatste bezwaar maakt het toepassen ervan als registratietoestel in een kofferapparaat met batterijvoeding practisch ondoenlijk.

Versterker-eischen.

Deze hangen af van het doel waarvoor de versterker noodig is. Zoo kan het versterken verlangd worden van spanningen, die te klein zijn om met den snaargalvanometer te worden waargenomen (*10* tot *100* μV) tot een niveau waarop dat wel mogelijk is. Wannner verder geen eischen gesteld worden is een één- of tweetraps gelijkspanningsversterker met een versterkingsfactor van hoogstens 100 voldoende en deze kan zonder veel technische moeilijkheden bereikt worden. Bij registratie met een lusoscillograaf zijn reeds grootere versterkingen noodig en het bouwen van een gelijkstroomversterker daarvoor is al een lastig probleem.

Wenscht men de voordeelen van een kathodestraalbuis te benutten, dan moet men ook het voornaamste nadeel, de geringe spanningsgevoeligheid, op den koop toe nemen. Daar een kathodestraalbuis voor een behoorlijken uitslag op het scherm *20* tot *30 Volt* noodig heeft op de afwijkplaten, beteekent dit, dat de hier geëischte versterking, wanneer spanningen tot *10* μV zichtbaar gemaakt moeten worden, 2 à 3×10^6 bedraagt, waarbij vanzelf sprekend nog een onvervormde uitgangsspanning van *30 V* moet worden geleverd. Wil men een allround versterker voor physiologische spanningen maken, dan moet daarnaast geëischt worden dat de frequentie-karakteristiek vlak

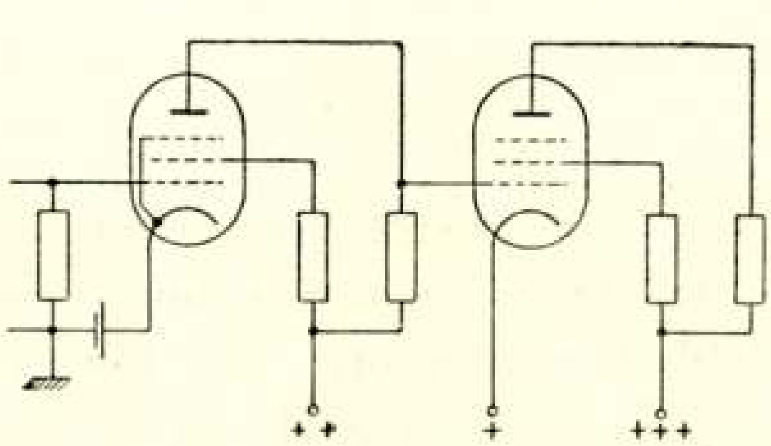
kan zijn van 0—5000 perioden per sec., waarbij desnoods voor onderdrukking van storingen of ter vermijding van nulpuntverschuiving de bovenste en onderste grens nog verschoven kunnen worden, wanneer dit voor de beoogde toepassing toelaatbaar is.

Beschreven uitvoeringen.

Een versterker voor een frequentiegebied van *0—5000 Hz* met een spanningsversterking van 2×10^6, die stabiel werkt, eenvoudig bedienbaar is, en niet lijdt onder het beruchte euvel, dat het nulpunt ook zonder aangebracht gelijkspanning verloopt, is tot dusver nergens beschreven. Zoolang daartoe de versterkerlamp gebruikt wordt in schakelingen, waarbij de instelling beïnvloed wordt door de lamp-grootheden, is de kans daarop ook niet groot, en zijn alle aangegeven middelen om dit euvel te bestrijden min of meer geslaagde methoden om deze hinderlijke veranderingen binnen een beperkt gebied te compenseeren en de principieele ongeschiktheid van thermionische lampen voor gelijkspanningsversterking te maskeeren. Voor een duidelijk overzicht van de moeilijkheden, die moeten worden overwonnen, worden hieronder eenige gebruikte methoden, met de er nog aanklevende bezwaren besproken.

Galvanisch gekoppelde versterker.

De meest voor de hand liggende methode van gelijkspanningsversterking, aansluitend aan de beproefde schakeling van den laagfrequenten weerstandsversterker, is in principe in *fig. 1*



Figuur 1.

aangegeven. Hierbij ontbreekt de koppelcondensator: elk rooster is aan de voorgaande plaat „galvanisch" gekoppeld, waarbij voor een juiste voorspanning van elke electrode gezorgd moet

worden. De bij het gebruik optredende ongemakken zijn te danken aan:

1. veranderingen van de gloeispanning, daarmee de emissie en den plaatstroom,
2. de lange aanlooptijd (ca. 15 min.) noodig voor het bereiken van een konstante emissie na het inschakelen en konstante temperatuur van de lampen (thermospanningen!),
3. veranderingen van de plaatstroomvoedingsbron, welke direct versterkt worden,
4. veranderingen van de schermroostervoedingsspanning, door daaruit volgende plaatstroomveranderingen,
5. ontregeling door verouderen of verwisselen van lampen. Daarbij spelen alleen de lampen in de eerste trap een rol, door de er achter volgende versterking.

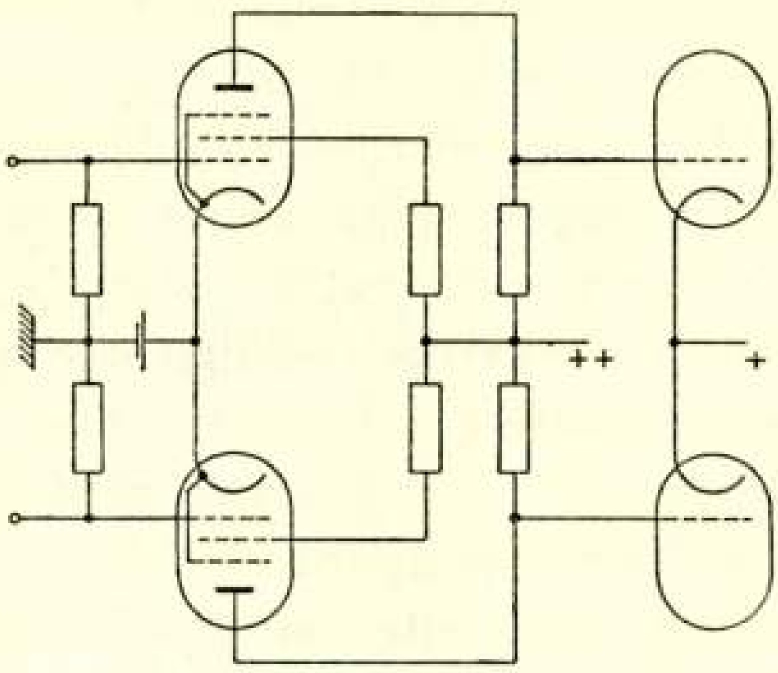
De lastigste bezwaren zijn voorop gezet. Aan de punten 3 en 4 kan door moderne stabilisatie-methoden verregaand tegemoet gekomen worden, al beteekent een constantheid van de voedingsspanningen van de eerste trap van *0,1 mV* en vaak nog beter, toch altijd een zware eisch. Punt 5 voltrekt zich langzaam en werkt niet zeer storend. De in punt 1 en 2 genoemde moeilijkheden, beide samenhangend met veranderenden emissiestroom, zijn echter het hinderlijkst en het moeilijkst te bestrijden. Zorgvuldige gloeistroom-stabilisatie is noodig voor 1, direct verhitte lampen helpt bij 2. De mogelijkheid van voeding van dergelijke versterkers uit het wisselstroomnet wordt vooral door punt 1 practisch onmogelijk gemaakt, terwijl bij de gevoeligste typen ook 3 en 4 te groote technische moeilijkheden leveren. Voor een overzicht van de tallooze ontworpen compensatie schakelingen zij verder naar de uitgebreide litteratuur-overzichten verwezen [1]).

Balansversterker.

Een aanmerkelijke stap vooruit beteekende het toepassen van dergelijke versterkers in balansschakeling, (*fig. 2*), waarbij elke versterkertrap dubbel uitgevoerd is. De te meten spanning wordt in balans aangesloten aan de beide ingangsroosters; het potentiaal verschil van de eerste beide platen wordt weer verder versterkt, enz. De moeilijkheden, die veroorzaakt worden door de bij den enkelvoudigen versterker opgesomde 5 punten,

[1]) W. Kleen en W. Graffunder, A.T.M. 1936, I 8330-1,

worden nu aanmerkelijk gereduceerd. In beide helften treden gelijkgerichte veranderingen op. Slechts de *verschillen* daartusschen veroorzaken nu nulpuntverschuivingen, terwijl de gemeenschappelijke plaatspanningsdaling of -stijging een verwaarloosbare invloed op de versterking heeft zoo lang door den geheelen versterker de instellingen van de lampen binnen een gebied blijven, waar de steilheid niet te veel verandert. Ofschoon de

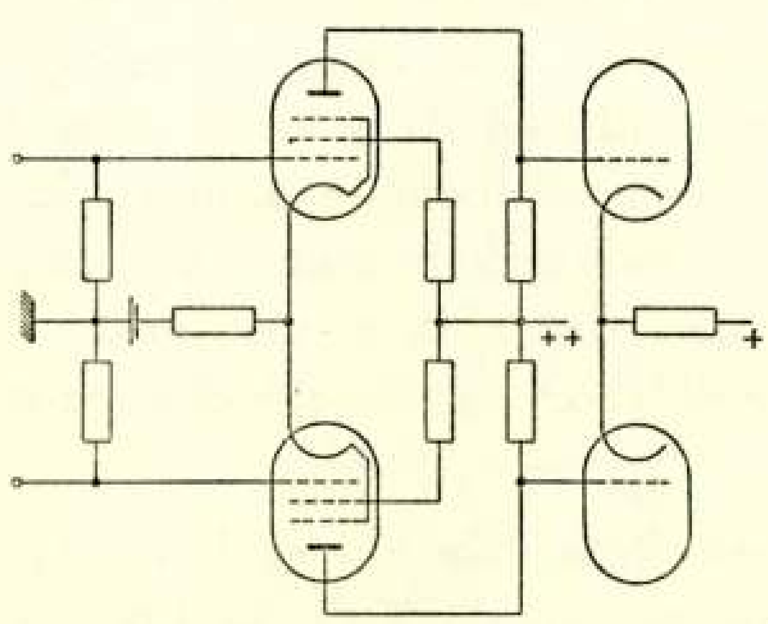


Figuur 2.

moeilijkheden daardoor natnurlijk niet opgeheven zijn, worden ze minstens een grootte-orde verkleind. Tevens vormt deze schakeling een overgang naar een nog verbeterde uitvoering:

Balansversterker met negatieve terugkoppeling.

De groote verbetering daarin is te danken aan het gebruik van een gemeenschappelijken grooten kathodeweerstand, die niet ontkoppeld is (*fig. 3*) en een zoo hoog mogelijke waarde heeft.



Figuur 3.

De voornaamste werking van dezen kathodeweerstand is, dat voor spanningen, die *in* phase aan de twee stuurroosters toe-

gevoerd worden en waarvoor de twee lampen parallel werken, de oorspronkelijke versterkingsfactor v_o verminderd wordt tot $v_f = \frac{v_o}{1 + ga}$, waarin g = versterkingsfactor van de lamp en $a = \frac{2 R_k}{R_a + R_i + R_k}$. Dit is het geval van de normale negatieve terugkoppeling, waarbij echter in het vervangingsschema van de twee lampen de kathodeweerstand vervangen kan worden door $2 g R_k$. Voor spanningen die in tegen phase aan de twee stuurroosters worden toegevoerd blijkt de versterkingsfactor te zijn: $v_t = v_o$. Dit is begrijpelijk, omdat de kathodestroomveranderingen, die veroorzaakt worden door de ingangsroosterspanningen, elkaar in de kathodeleiding juist tegenwerken, zoodat negatieve terugkoppeling achterwege blijft. Bij willekeurige phase-condities kunnen de twee ingangsspanningen altijd ontbonden worden in twee componenten in phase en twee in tegenphase, waarvan de eerste na enkele trappen sterk verzwakt zijn, afhankelijk van de grootte van R_k, zoodat elk willekeurig, aan den ingang toegevoerd stel spanningen aan den uitgang van den versterker een symmetrisch stel spanningen oplevert.

De aanwezigheid van den grooten kathodeweerstand heeft dus als voornaamste invloed, dat bij alle optredende veranderingen de som van de twee plaatstroomen zoo goed mogelijk constant gehouden wordt, zoodat de gemeenschappelijke plaatspanningsdaling of -stijging die bij den normalen balansversterker nog hinderlijk kon worden, hier grootendeels onderdrukt is. Het verschil tusschen de beide plaatstroomen blijft echter gevoelig voor de veranderingen, zoolang in de beide lampen van één balanstrap niet volkomen gelijke wijzigingen optreden. En in het bijzonder blijven de punten 1 en 2 storend werken. Dat niettemin, na een voldoenden aanlooptijd, een op dit principe opgebouwden versterker zeer handelbaar is, bewijst de beschrijving van een dergelijken versterker, vervaardigd door H. Goldberg [1]), ook voor physiologische metingen, die een max. versterkingsfactor van 6×10^6 heeft en een bandbreedte van *5000 Hz.* Volgens hetzelfde beginsel werd ook op het Hoogfrequent-laboratorium van de T.H. te Delft een 4-trapsversterker gebouwd. Deze bevat een penthode als kathodeweerstand

---

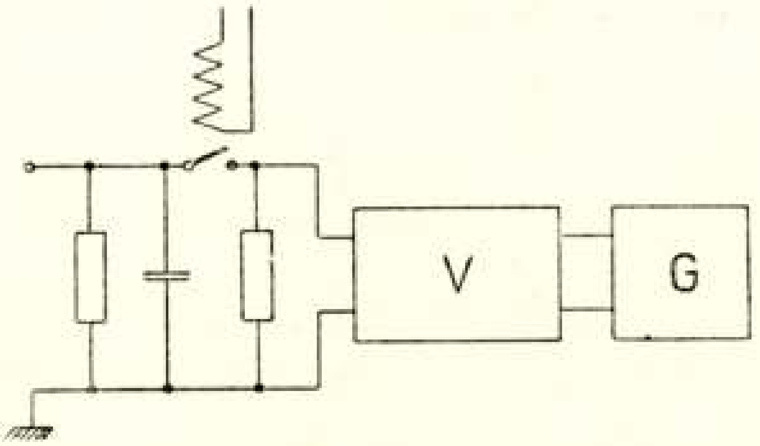
[1]) H. Goldberg, Transaction A.I.E.E. 59, 60, Jan. 1940.

$R_{k'}$, daar hiervoor een zoo hoog mogelijke differentiaal weerstand en een met het oog op het spanningsverval niet te hooge gelijkstroomweerstand wordt verlangd. Hier werd geen absolute gelijkstroomversterker geëischt, zoodat tusschen de tweede en derde trap een *RC*-koppellid is opgenomen. Daarmee wordt de nulpuntinstelling aanmerkelijk vereenvoudigd. Een uitvoeriger beschrijving van dezen versterker zal waarschijnlijk binnenkort als afzonderlijk artikel in dit tijdschrift verschijnen.

Omvorming van de gelijkspanning in wisselspanning.

Daar ondanks de verbeteringen door balansuitvoering eventueel met negatieve terugkoppeling de galvanisch gekoppelde versterker niet tot een volkomen bevredigenden eindvorm is gebracht, heeft men daarnaast langs verschillende wegen getracht door omzetting van de gelijkspanning in een ermee evenredige wisselspanning de moeilijkheden te omzeilen die de thermionische buizen de gelijkspanningsversterking in den weg leggen. Dit omzetten behoort dan te gebeuren in een schakeling, die geen lamp of ander niet-constant element (zooals een gelijkrichtcel) bevat; pas daarna kan de verkregen wisselspanning aan een van de beproefde lampschakelingen voor wisselspanningsversterking worden toevertrouwd.

Het omzetten van de gelijkspanning in een wisselspanning kan op de eenvoudigste wijze gebeuren door het periodiek onderbreken ervan met behulp van een interruptor, waarbij een wisselspanning van rechthoekigen vorm ontstaat, met als omhullende de gelijkspanning of laagfrequente wisselspanning (*fig. 4*). Volgens dit principe zijn ook gelijkspanningsversterkers

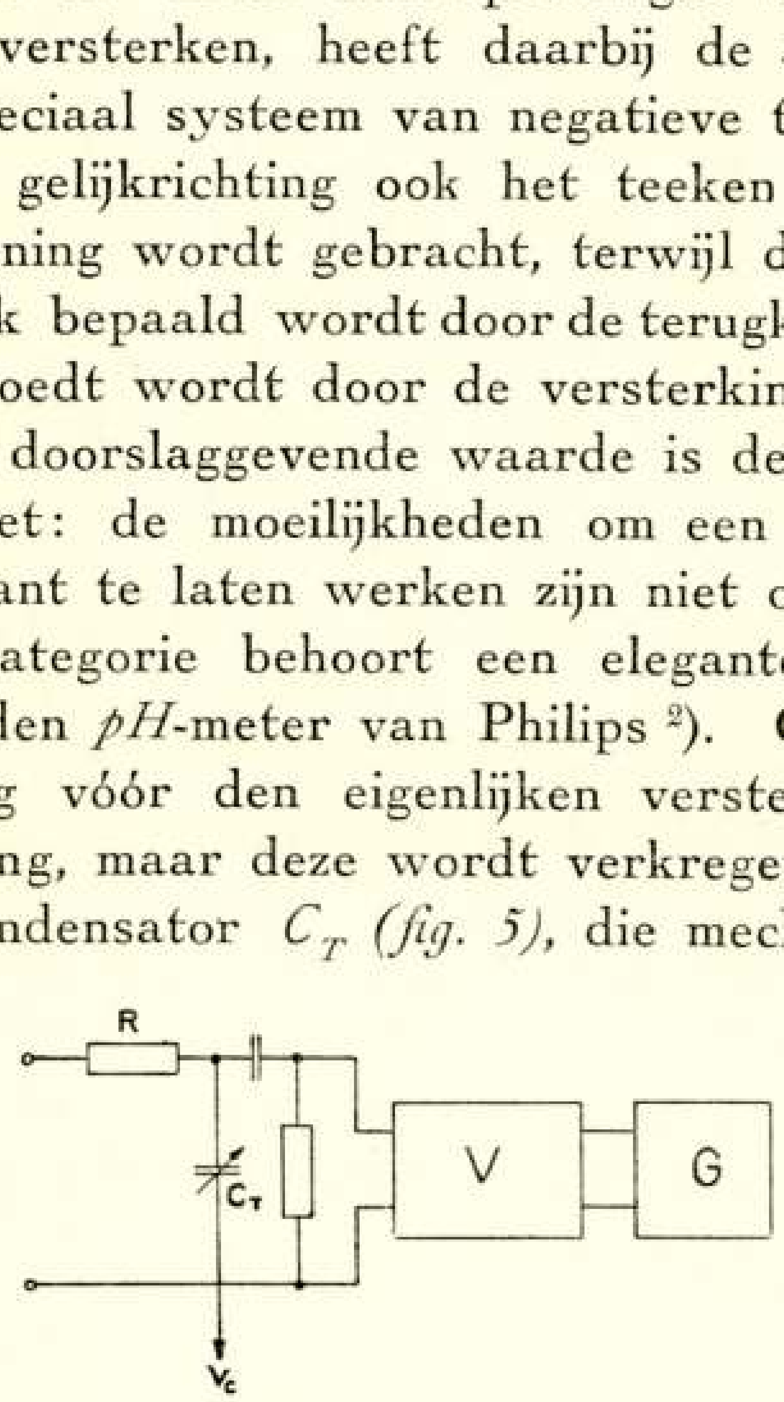


Figuur 4.

gebouwd, die echter nog niet geheel bevredigend werken, en ook nog niet geschikt zijn voor uiterst kleine spanningen. Het aanbrengen van de mechanische interruptor aan den ingang van een zeer gevoeligen versterker geeft nl. een groote kans op

storingen. Bovendien heeft de versterker geen richtingszin: positieve en negatieve ingangsspanningen geven dezelfde eindspanning. Tevens wordt voor het versterken van een frequentieband van *0—5000 Hz* een zeer hooge onderbrekingsfrequentie geëischt (minstens 50.000 maal per sec.), die met mechanische middelen practisch niet te verwezenlijken is. Het gebruik van deze methode blijft dus voorloopig beperkt tot het versterken van niet te kleine en niet te snel veranderende spanningen. Door Eberhardt, Nüszlein en Rupp [1]) wordt een uitgewerkte versterker van dit type beschreven, waarbij de onderbrekingsfrequentie *50 Hz* is. Deze kan spanningen van omstreeks *10 mV* behoorlijk versterken, heeft daarbij de aantrekkelijkheid dat door een speciaal systeem van negatieve terugkoppeling en phase gevoelige gelijkrichting ook het teeken van de ingangsspanning in rekening wordt gebracht, terwijl de totale versterking voornamelijk bepaald wordt door de terugkoppelverhouding en weinig beïnvloedt wordt door de versterkingsfactor van den versterker. Van doorslaggevende waarde is deze laatste eigenschap echter niet: de moeilijkheden om een wisselspanningsversterker constant te laten werken zijn niet overdreven groot.

In dezelfde categorie behoort een eleganter oplossing, die toegepast is in den *pH*-meter van Philips [2]). Ook daar wordt de gelijkspanning vóór den eigenlijken versterker omgezet in een wisselspanning, maar deze wordt verkregen met behulp van een trillende condensator C_T *(fig. 5)*, die mechanisch trilt met



Figuur 5.

125 per/sec., waardoor haar capaciteit wisselt tusschen 70 en 130 % van de gemiddelde waarde. Deze condensator wordt aan de eene zijde verbonden via een hoogen weerstand *R* met den gelijkspanningsbron, aan de andere zijde (omdat het instrument als nulaanwijzer gebruikt wordt) aan een bekende, regelbare compensatiespanning V_c. Wanneer RC_T voldoende groot is ten

[1]) R. Eberhardt, G. Nüszlein en H. Rupp, E.T.Z. 62, 493, 29 Mei 1941.
[2]) C. Dorsman, Philips Techn. T. 7, 24, Jan. 1942.

opzichte van den trillingstijd ontstaat door de wisselingen in de capaciteit bij nagenoeg constante lading een wisselspanning op de condensator met amplitudo = $^1/_3$ deel van de te meten gelijkspanning. Het voordeel van deze methode boven de interruptor is, dat hier geen contacten in den ingang van den versterker geopend en gesloten worden, zoodat de kans op storingen veel geringer is.

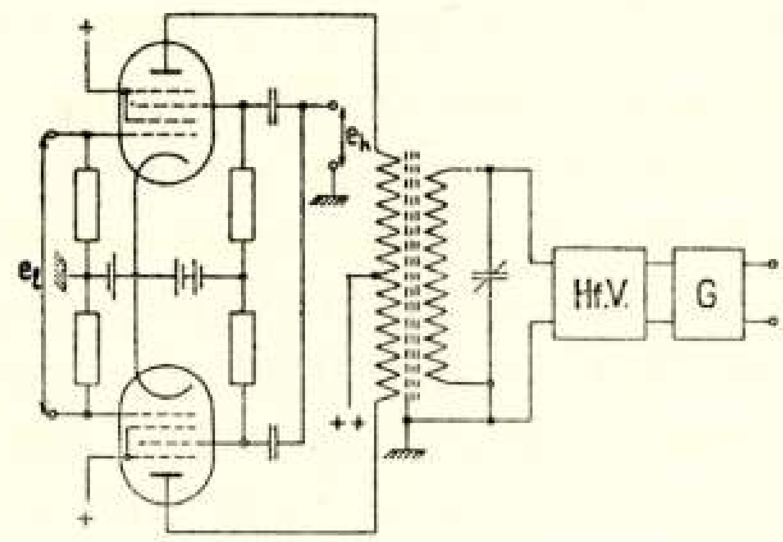
Waarschijnlijk zal tenslotte ook de oplossing voor den physiologischen versterker met de eischen die we aan het begin formuleerden, in deze richting gezocht moeten worden. Om dan ook de laagfrequente spanning te kunnen versterken moet de trilfrequentie opgevoerd worden tot minstens 10^5 per/sec., terwijl ook de gevoeligheid nog moet toenemen. Wel is waar blijft dan aan het systeem nog het bezwaar kleven van het ontbreken van den richtingszin, maar in de physiologie speelt dit geen rol, daar men met het oog op altijd optredende contactpotentialen en polarisatiespanningen ook daar steeds een regelbare voorspanning op de condensator zal willen behouden, zoodat deze spanning altijd hetzelfde teeken houdt. Dit maakt dan ook een compensatie-inrichting noodzakelijk.

De moeilijkheden, ofschoon op het oog niet onoverkomelijk, schijnen hier nog vrij groot te zijn, en de beschreven versterker ligt voorloopig nog niet direct binnen het bereik. Tot zoolang is waarschijnlijk de best hanteerbare gelijkspanningsversterker die, waarbij gebruik gemaakt wordt van modulatie op een draaggolf.

Modulatie van een draaggolf.

Bij de modulatie van een hoogfrequente trilling is een lampschakeling vrijwel onontbeerlijk. Wel is waar bestaan ook methoden, die gebruik maken van gelijkrichtcellen, maar deze bieden wat constantheid betreft geen voordeelen boven deze lampschakelingen. Vanzelfsprekend hebben dan de bij den galvanisch-gekoppelden versterker opgesomde 5 punten weer invloed op de instelling, maar deze invloed is geringer en kan op analoge wijze verminderd worden. Wat het eigenlijke moduleeren betreft, dat gebeurt op doeltreffende wijze in één van de bekende mengschakelingen. Daar zoowel bij additieve menging, waarbij de laagfrequente en hoogfrequente spanning aan hetzelfde rooster worden toegevoerd, als bij de multiplicatieve menging, waarbij de twee spanningen aan twee verschillende

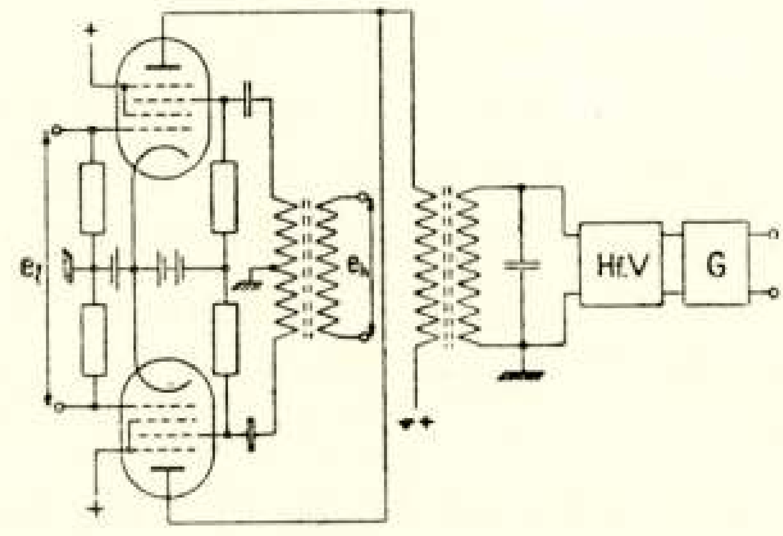
roosters van een lamp worden toegevoerd, het mengresultaat behalve met de laagfrequente spanning steeds evenredig is met de amplitudo van de meng-wisselspanning is het voor de totale gevoeligheid noodzakelijk een mengspanning te gebruiken van behoorlijke amplitudo. Dit brengt mee, dat de modulatiediepte $\frac{e_l}{e_h}$ dan speciaal bij de hier gebruikte zeer kleine laagfrequente wisselspanningen zeer gering wordt, zoodat het met het oog op doelmatige versterking na de modulatie noodzakelijk wordt de



Figuur 6a.

draaggolf grootendeels te onderdrukken. Dat kan gebeuren door b.v. in een extra transformatorwikkeling weer een gedeelte van den oorspronkelijken draaggolf met de juiste amplitudo en phase bij te mengen, het biedt echter voordeelen dit te doen in een balansschakeling van lampen volgens één van de twee methoden die in de fig. 6a en b voor hexodes als mengelementen zijn aangegeven.

In *fig. 6a* worden de beide plaatstroomen gelijkphasig gemoduleerd door aan de derde roosters toegevoerde hoogfrequente



Figuur 6b.

spanningen, die in phase zijn. Worden dan deze platen aangesloten aan de uiteinden van een symmetrisch gewikkelden ba-

lanstransformator, dan induceeren de plaatstroomen in de secundaire wikkeling twee spanningen die elkaar tegenwerken en bij juiste regeling van de steilheid van één der hexodes volkomen opheffen.

In *fig. 6b* wordt iets dergelijks bereikt door aan de derde roosters *hf*-spanningen in tegenphase toe te voeren en de platen parallel verbonden aan de primaire wikkeling van een transformator aan te sluiten [1]). Voor de frequentie van de hoogfrequente spanning is gekozen 10^5 per/sec., waarmee een frequentieband van 5000 per/sec. gemakkelijk gelijkmatig versterkt kan worden.

Bij beproeving van beide methoden bleek de eerste om twee redenen de voorkeur te verdienen:

1. Het is veel eenvoudiger aan twee roosters twee spanningen toe te voeren die in phase zijn dan twee die nauwkeurig in tegenphase zijn. Men kan dan niet volstaan met de twee spanningen van een in het midden geaarden balanstransformator af te nemen, maar heeft daarvoor phasedraaiers noodig. De daarvan verkregen spanningen hebben dan frequentie afhankelijke phasen, zoodat het ook noodzakelijk wordt deze frequentie zorgvuldig constant te houden. Bij gelijkphasig toegevoerde spanningen is dit geheel overbodig.

2. Wanneer voor $I_a = f(e_l, e_h)$ een reeksontwikkeling volgens Taylor gemaakt wordt en daarna $I_a - I_a'$ berekend, waarmee $e_{sec.}$ evenredig is, dan blijkt voor twee identieke hexodes in de schakeling 6_a bij volledige compensatie:

$$I_a = I_{a_0} + ae_l + be_h + \frac{1}{2!}ce_l^2 + de_l e_h + \frac{1}{2!}fe_h^2 + \frac{1}{3!}ge_l^3 + \frac{1}{2!}he_l^2 e_h + \frac{1}{2!}je_l e_h^2 + \frac{1}{3!}ke_h^3 + \ldots$$

$$I_a' = I_{a_0} - ae_l + be_h + \frac{1}{2!}ce_l^2 - de_l e_h + \frac{1}{2!}fe_h^2 - \frac{1}{3!}ge_l^3 + \frac{1}{2!}he_l^2 e_h - \frac{1}{2!}je_l e_h^2 + \frac{1}{3!}ke_h^3 + \ldots \quad -$$

$$I_a - I_a' = 2ae_l + 2de_l e_h + \frac{2}{3!}ge_l^3 + je_l e_h^2 + \ldots$$

Hierin stellen de constanten a, b, c, enz. de differentiaalquotiënten van de eerste en hoogere orde voor: $\frac{\partial I_a}{\partial e_l}$, $\frac{\partial I_a}{\partial e_h}$, $\frac{\partial^2 I_a}{\partial e_l^2}$, enz.

---

[1]) L. J. Black en H. J. Scott. Proc. I.R.E. 28, 269, Juni 1940.

Doet men hetzelfde voor de schakeling volgens 6b, dan vindt men:

$$I_a = I_{a_0} + ae_l + be_h + \frac{1}{2!}ce_l^2 + de_l e_h + \frac{1}{2!}fe_h^2 + \frac{1}{3!}ge_l^3 + \frac{1}{2!}he_l^2 e_h + \frac{1}{2!}je_l e_h^2 + \frac{1}{3!}ke_h^3 + \ldots..$$

$$I'_a = I_{a_0} = ae_l - be_h + \frac{1}{2!}ce_l^2 + de_l e_h + \frac{1}{2!}fe_h^2 - \frac{1}{3!}ge_l^3 - \frac{1}{2!}he_l^2 e_h - \frac{1}{2!}je_l e_h^2 - \frac{1}{3!}ke_h^3 + \ldots..$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \; +$$

$$I_a + I'_a = ce_l^2 + 2de_l e_h + fe_h^2$$

Bij schakeling 6a zijn nl. alleen de laagfrequente spanningen in tegenphase, bij schak. 6b bovendien de hoogfrequente spanningen. Uit het resultaat blijkt, dat bij de lagere afgeleiden, die in hoofdzaak verantwoordelijk zijn voor de mengproducten bij de eerste schakeling noch de draaggolf, noch de tweede harmonische voorkomt. De laagfrequente component en de boventonen daarvan zijn zeer klein en worden bovendien gemakkelijk uitgezeefd in de erop volgende hoogfrequent-kringen.

Bij de tweede schakeling blijft echter een merkbare tweede harmonische over van den draaggolf op het ingangsrooster van den hoogfrequentversterker. Overigens is de term die voor de zijbanden $h + l$ en $h - l$ aansprakelijk is, uiteraard even sterk bij beide schakelingen.

Doordat dus bij schak. 6a de invloed van niet-lineaire vervormingen van de hoogfrequentspanning geringer is, verdient deze schakeling ook daarom de voorkeur. Bij additieve menging, die ook zeer doelmatig toegepast kan worden door kathodemodulatie, treedt iets dergelijks op.

De storingsinvloeden. Gaan we de reeds vroeger opgesomde 5 oorzaken voor ontregeling na dan blijkt het volgende:

1. De ontregeling van den versterker door emissie veranderingen in de eerste trap te wijten aan verandering van de gloeispanning V_f treedt ook hier op wanneer gloeistroomveranderingen ongelijke veranderingen in de steilheden van de twee menglampen veroorzaken. Er is geen reden om aan te nemen, dat de storing hier minder hinderlijk is dan bij de galvanisch-gekoppelde versterkers. Evenals daar kan ze evenwel sterk verminderd worden door in serie met de gloeidraad van één der balanslampen een weerstand op te nemen, waarmee de temperatuur en daardoor de emissie geregeld kan worden. Het is dan mogelijk tegelijkertijd S en $\frac{\partial S}{\partial v_f}$ voor beide lampen in een beperkt gebied gelijk te maken.

2. Ook aan den langen aanlooptijd verandert principieel niet veel. Afdoende bestrijdingsmiddelen zijn er niet. (Ingangsbalanslampen één kathode!)

3. Plaatspanningsveranderingen spelen in het geheel geen rol: de steilheid is daar practisch onafhankelijk van; stabilisatie van deze spanning is dan ook overbodig.

4. De schermroosterspanning heeft meer invloed op de steilheid. In de verschillen van deze steilheidsveranderingen voor twee lampen zit een aanzienlijke strooiing. Bij den in Waalsdorp vervaardigden versterker bleek dit voor 1 $^0/_0$ verandering van beide spanningen te beantwoorden aan *2,5 mV* œquivalent ingangssignaal.

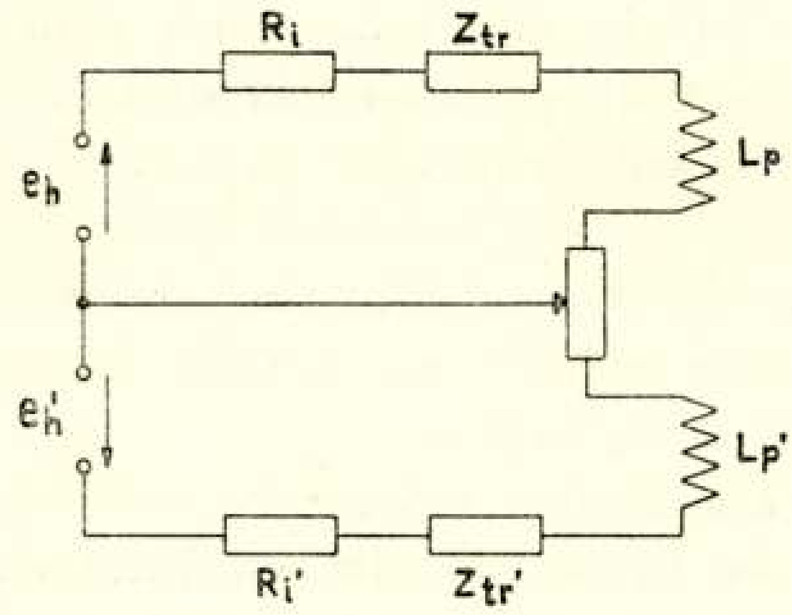
5. Verwisselen van lampen maakt een herziening van de ininstelling noodzakelijk, maar veroorzaakt overigens geen moeilijkheden in de bediening.

Terloops zij hier gewezen op het voordeel boven constantedraaggolfonderdrukking, waarop hiervoor reeds werd gewezen. Dit komt daarop neer, dat de veranderingen in de twee balanslampen elkaar weer ten deele opheffen: alleen de verschillen tusschen deze twee beïnvloeden de instelling, zoodat de stabiliteit vergeleken bij de schakeling met constante draaggolfonderdrukking evenveel gunstiger is dan die van den balansvergeleken bij den enkelvoudigen galvanisch-gekoppelden versterker.

Vergeleken bij de versterkers zonder draaggolf treedt hier nog een zesde factor op, die een geringe verstoring van de nulinstelling teweeg kan brengen.

6. Behalve de amplituden moeten ook de phasen van de wisselspanningen in de beide primaire wikkelingen van den balanstransformator gelijk zijn bij volledige compensatie. Deze worden eenigszins beïnvloed door veranderingen in den inwendigen weerstand van de twee menglampen. Dit kan toegelicht worden met het vervangingsschema van de mengtrap, dat in *fig. 7* is weergegeven. Daarin zijn de in phase toegevoerde wisselspanningen weergegeven door e_h en e_h'. De stroomen door de transformatorwikkelingen zijn eenigszins phase-verschoven ten opzichte van deze spanningen, en wel over gelijke hoeken, wanneer R_i, Z_{tr} en L_p voor beide helften gelijk zijn. (Daar ze in het algemeen niet precies gelijk zijn, is tusschen de beide primaire transformatorwikkelingen een regelbare phase-compensatie weerstand opgenomen). Z_{tr} stelt hierin voor de in den primairen kring getransformeerde impedantie ten gevolge van belasting

van de beide andere transformatorwikkelingen; deze is gelijk aan $\frac{(\omega M)^2}{Z_s}$ voor elke wikkeling. Bij verandering van één van de electrode voorspanningen van een menglamp verandert de inwendige weerstand R_i daarvan eenigszins, wat een geringe ontregeling meebrengt. Storingen ten gevolge van phaseveranderingen van e_h en e_h' kunnen, zooals reeds eerder aangegeven, buiten beschouwing blijven bij de schakeling volgens fig. 6a; bij minder doelmatige schakelingen, zooals in 6b, hebben ook die een belangrijken invloed. De veranderingen, die in R_i optreden bij verandering van electrodespanningen is bij groote versterkingen inderdaad hinderlijk, wanneer hexodes als ingangslampen worden gebruikt, in het bijzonder wanneer bijvoorbeeld de derde roosterspanning daarvan verandert. Worden echter penthodes gebruikt (hiervoor zijn zeer geschikt, mede door het geringe ruischniveau, E.F.8 lampen) dan zijn de voorkomende wijzigingen van den inwendigen weerstand zoo gering, dat een bijregelen van de phasen onder alle omstandigheden, dus tot versterkingen van 10^6, geheel overbodig is.



Figuur 7.

Resumeerend kunnen we dus vaststellen, dat van de genoemde storingsbronnen overblijven:

1. De nulpuntsverandering die te wijten is aan gloeispanningsveranderingen.
2. De aanlooptijd, noodig voor het opwarmen.
3. Een zeer geringe ontregeling door veranderingen van de schermroosterspanning.

Bij een uitgevoerden versterker met versterkingsfacor 5×10^5, waarin twee willekeurige E.F.8 lampen voor de eerste trap werden gebruikt bleef de eerste afwijking voor plus en min *0,1 V* gloeispanningsverandering rond *6,0 Volt*, binnen *50* μV

aequivalent ingangssignaal, wanneer in een der gloeistroomleidingen een geschikte weerstand was opgenomen; de tweede geeft 1 minuut na het inschakelen een ontregeling van *20 mV* aequivalent ingangssignaal; deze is echter na 10 minuten beneden *5 μV* gedaald. De door de derde factor veroorzaakte ontregeling bij gebruik van een Philips' gestabiliseerd plaatspanningsapparaat, dat een constantheid garandeert binnen 2×10^{-5} voor 5% netspanningsverandering, bleef onder alle omstandigheden eveneens binnen *5 μV* aequiv.ingangssignaal.

Daartegenover kunnen als voordeelen van deze modulatiemethode genoemd worden:

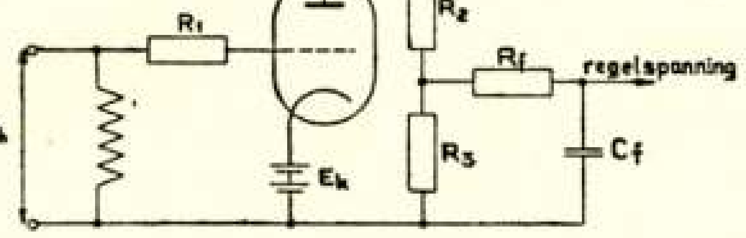
1. De invloed van plaatspanningsveranderingen van de 1e trap is te verwaarloozen.
2. De overige spanningen behoeven alleen voor de 1e trap constant gehouden te worden. Voor de rest van de schakeling kunnen elke willekeurige hf-versterkerschakeling en elke lineaire gelijkrichtschakeling worden toegepast.
3. De omvorming in een hf-wisselspanning maakt het mogelijk met weinig versterkerlampen een groote versterking te bereiken.

Automatische nulpuntscorrectie.

De ontregeling, die na de bovenbeschreven maatregelen overblijft, kan in het gebruik nog hinderlijk zijn. In het bijzonder levert de lange aanlooptijd van 10 minuten een bezwaar op, wanneer men snel wil meten en de te meten wisselspanning een niet te lage grondfrequentie heeft, zoodat een gelijkspanningsversterker eigenlijk niet noodig is. Bovendien treedt vaak bij het gebruik als physiologischen versterker, ook wanneer z.g. onpolariseerbare electroden gebruikt worden, een polarisatie-spanning op aan de electroden, die niet constant blijft, eenige *mV* kan bedragen, en vanzelfsprekend eveneens een verschuiving van het nulpunt veroorzaakt. Het is dan vaak handiger om een wisselspanningsversterker te gebruiken met lage grondfrequentie dan een zuiveren gelijkspanningsversterker.

In de versterkers, die in het laboratorium te Waalsdorp ontwikkeld werden, is de mogelijkheid open gelaten om van den gelijkspanningsversterker een wisselspanningsversterker te maken met een regelbare tijdconstante, dus met een regelbare onderste grensfrequentie. Dit kan gebeuren, door de hf-wisselspanning aan het eind van den versterker gelijk te richten, en

de gelijkgerichte negatieve spanning via een vertragend R.C.-filter op de wijze van de automatische volumeregeling van radio-ontvangers toe te voeren aan een rooster van één der beide ingangslampen. Door de regeling neemt de steilheid van deze lamp af, en verandert de sterkte van den overblijvenden draaggolf. Aan weerszijden van de instelling voor volledige compensatie zijn twee werk-instellingen mogelijk, waarbij de resteerende draaggolf-amplitudo zoo groot is, dat bij de optredende ingangsspanning een voldoende modulatie-diepte ontstaat. Aan de eene zijde van het volledige compensatiepunt wordt de instelling door de regelspanning inderdaad naar dit nulpunt teruggeschoven, aan de andere zijde veroorzaakt de regelspanning echter een verdere ontregeling, daardoor een nog grootere uitgangsspanning en regelspanning, zoodat een labiele toestand ontstaat. Daar dit voor de praktijk uiteraard niet toelaatbaar is, kan geen normale diodegelijkrichtschakeling gebruikt worden om de regelspanning te verkrijgen, maar moet een phase-gevoelige gelijkrichter toegepast worden. Daarbij wordt gebruik gemaakt van het feit, dat aan één zijde van de volledige compensatie-instelling, afhankelijk van de verbindingen in den hf-versterker, uitgangsspanning en oscillatorspanning in phase, aan de andere zijde juist in tegenphase zijn. Gebruikt men nu voor het gelijkrichten een triode, voert men de oorspronkelijke oscillatorspanning via een begrenzingsweerstand toe aan het stuurrooster en de uitgangswisselspanning aan de plaat (*fig. 8*),



Figuur 8.

dan ontstaat op den belastingsweerstand van de gelijkrichtlamp alleen een negatieve gelijkspanning wanneer de oscillatorspanning en de uitgangsspanning tegelijkertijd positief zijn, zoodat inderdaad een phase-gevoelige, eenzijdige gelijkrichter verkregen is, die slechts aan één zijde van de volledige compensatie een negatieve regelspanning oplevert, terwijl aan de andere zijde in het geheel geen regelspanning ontstaat. Voert men nu deze regelspanning toe aan een rooster van de ingangslamp, die de

grootste conversie versterking heeft wanneer de twee wisselspanningen op den gelijkrichter in phase zijn, en zorgt men door instelling van de overige electrode-spanningen, dat zonder regelspanning deze grootere versterking onder alle omstandigheden gehandhaafd blijft, dan zorgt dit regelorgaan voor een volkomen betrouwbaar werkende automatische nulpuntscorrectie. Door de regeling „vertraagd" te maken (hiertoe dient de kathode-spanning E_k), dwingt men den versterker in een evenwichtstoestand, waarbij juist de gewenschte resteerende draaggolfamplitudo overblijft, die een goede modulatiediepte levert benevens een gelijkgerichte spanning in den lineairen gelijkrichter, die in een gunstig deel van de roosterruimte van de er op volgende laagfrequent-eindtrap valt.

In de keuze van het rooster, waaraan de regelspanning wordt toegevoerd, is men in hooge mate vrij: worden hexodes als ingangslampen gebruikt, dan kan daarvoor het eerste zoowel als het derde rooster gebruikt worden, bij gebruik van de E.F.8 het eerste of het tweede rooster. Gebruikt men het eerste rooster, dan is men genoodzaakt de ingangsspanning onsymmetrisch aan het eerste rooster van de andere balanslamp toe te voeren. Geeft men de voorkeur aan een symmetrischen ingang, dan moeten de eerste roosters van beide balanslampen vrij blijven en moet de regelspanning naar één van de andere genoemde roosters worden gebracht. Dat de steilheid van deze roosters in het algemeen kleiner is dan die van het eerste rooster speelt daarbij geen rol: de condities zijn hier geheel anders dan bij de normale automatische volumeregeling. Terwijl daar vaak nog een versterkte regeling gewenscht wordt, is hier maar een zeer kleine regelspanning noodig om den versterker naar de nulinstelling terug te brengen. Vandaar de spanningsdeeler R_2, R_3 met weerstanden van b.v. *2* resp. *1 megohm*.

Tenslotte zij er nog op gewezen dat ook hier de uitgangsspanning niet absoluut constant blijft door de regeling: denkt men zich (als zeer ruime waarde) den versterker ontregeld uit het compensatiepunt over een gebied beantwoordend aan *20 mV* aequivalent ingangssignaal, neemt men verder aan dat de regelspanning aan het eerste rooster van een der ingangslampen wordt aangesloten (voor een ander rooster is nog een constant verhoudingsgetal noodig) en dat door de hooge waarde van $R_2 + R_3$, vergeleken bij den inwendigen weerstand van de gelijkrichtlamp, de piekwaarde van de wisselspanning en de gelijkgerichte spanning gelijk zijn, dan is eveneens *20 mV* regel-

spanning noodig om de oude instelling terug te verkrijgen. D.w.z. de gelijkgerichte spanning en dus ook de piekwaarde van de uitgangswisselspanning is met $\frac{R_2 + R_3}{R_3}$ $20\ mV$ toegenomen. Dit beantwoordt aan $\frac{1}{V} . \frac{R_2 + R_3}{R_3}$ $20\ mV$ aequivalent ingangssignaal als V de totale versterking van modulator en hf-versterker voorstelt (orde: 10^4). Van deze opvallend groote ontregeling blijft dus, afhankelijk van de aftakking $\frac{R_3}{R_2 + R_3}$ nog slechts enkele μV over, en dat speelt geen rol meer.

Het gebruik van dit vertragende regelorgaan, dat men indien gewenscht, kan uitschakelen, door R_3 kort te sluiten en dat men een regelbare tijdconstante tot eenige minuten toe kan geven door regeling van den weerstand R_f uit het vertragingsfiltercircuit $R_f C_f$ maakt van den origineelen gelijkstroomversterker eigenlijk een wisselstroomversterker met regelbare onderste grensfrequentie, wat bij vele physiologische metingen een aantrekkelijke eigenschap is.

Physisch Laboratorium Waalsdorp

DISCUSSIE

De Heer Metzelaar vraagt nadere gegevens over de ingangs-impedanties o.a. of deze symmetrisch of asymmetrisch zijn.

Ir. Piket: De ingangsweerstanden moeten, volgens sommige opgaven, in verband met huidcapaciteit en weerstand minstens $10^5\ \Omega$ bedragen; volgens metingen van de Heeren van der Wyck en Kleijn van deze huidimpedantie mogen deze echter, zonder ernstige vervorming, 3 tot $10\ k\ \Omega$ bedragen.

Met den geconstrueerden versterker is zoowel symmetrische als asymmetrische aansluiting mogelijk. De asymmetrische biedt echter vaak voordeelen door betere aarding van den patiënt.

M.: Waarom geen toepassing van electronen multiplicatoren?

P.: Bij de electronen multiplicatoren zonder foto-emissie is ook een gloeikathode noodig, wat evenveel kans op ontregeling biedt. Bovendien is het ruischniveau van deze versterkers zeer hoog, hetgeen de toepassing vrijwel onmogelijk maakt.

Ir. Vormer: Is het ook mogelijk inplaats van een mechanisch relais een brugschakeling met cuproxcellen, of iets dergelijks, toe te passen aan den ingang van den versterker?

P.: Iets dergelijks is niet geprobeerd, omdat ook gelijkrichtcellen geen constante elementen zijn. Worden deze, naar het voorstel van den Heer Vormer, gebruikt als electrische schakelaars, dan zijn daarvoor hooge schakelspanningen noodig, die in den ingang van een gevoeligen versterker ongetwijfeld ernstige storingen zullen veroorzaken.

Ledenlijst Nederlandsch Radiogenootschap

(Voor zoover in Nederland woonachtig).

Lid:

1929.	Ir. J. W. Alexander. Werkzaam bij de Nederlandsche Seintoestellenfabriek.	Loosdrechtscheweg 146, Hilversum.
1938.	Ir. M. van de Beek. Werkzaam bij de N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken (Natuurkundig Laboratorium).	Jac. Perkstraat 43, Eindhoven.
1930.	Th. P. van den Bergh. Direct. Radio-Holland.	Vondelstraat 11b, Amsterdam.
1920.	Prof. Ir. C. L. van der Bilt. Oud Hoogleeraar Technische Hoogeschool, Oud-wnd. Burgemeester 's Gravenhage.	Wassenaarscheweg 124, 's Gravenhage.
1925.	Ir. J. Bloemsma. Directeur School voor Radiotechniek. Leeraar Middelbaar Technische School te Haarlem.	Mient 551, 's Gravenhage.
1938.	Ir. L. Blok. Werkzaam bij de N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken (Natuurkundig Laboratorium).	Petrus Dondersstraat 7, Eindhoven.
1929.	Ir. H. J. Boetje. Hoofdingenieur-Directeur der Telegrafie en Telefonie.	Mesdagstr. 27, 's Gravenhage.
1926.	H. B. R. Boosman. Directeur der Nederlandsche Seintoestellenfabriek.	Hollandschelaan 13, Hilversum.

1941.	Ir. P. H. Boukema. Ingenieur der Telegrafie en Telefonie.	Timorstraat 21, Delft.
1941.	Ir. J. A. J. Bouman. Werkzaam bij de N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken.	Pluvierstraat 4, Eindhoven.
1941.	Ir. L. R. Bourgonjon. Assistent Technische Hoogeschool.	Gortstraat 12a, 's Gravenhage.
1941.	Ir. M. P. Breedveld. Ingenieur bij de Rijksradio omroep „de Nederlandsche Omroep".	's Gravelandscheweg 29b, Hilversum.
1938.	W. Broertjes. Directeur van het Amsterdamsch Radio Instituut.	Rivierenlaan 264, Amsterdam C.
1941.	Ir. H. W. L. Bruckman. Bedrijfsingenieur-conservator van het Laboratorium voor Electrotechniek aan de Technische Hoogeschool.	Kanaalweg 2b, Delft.
1920.	Ir. A. Dubois. Hoofdingenieur der Telegrafie en Telefonie.	Heemskerckstraat 32, 's Gravenhage.
1939.	Dr. Ir. H. C. A. van Duuren. Ingenieur der Telegrafie en Telefonie.	H. F. van Riellaan 9, Utrecht.
1928.	P. R. Dijksterhuis. Directeur van de N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken.	Lijsterlaan 9, Eindhoven.
1940.	Ir. B. van Dijl. Ingenieur der Telegrafie en Telefonie.	Van Beuningenstraat 90, 's-Gravenhage.
1942.	Ir. M. C. Ennen. Ingenieur der Telegrafie en Telefonie.	Kootwijk-Radio.
1920.	Ir. J. J. Enthoven.	Schiedamscheweg 255b, Rotterdam.

1942.	Ir. G. Franken. Assistent Technische Hoogeschool.	Groot Hertoginnelaan 136, 's-Gravenhage.
1923.	Ir. F. de Fremery. Werkzaam bij de Nederlandsche Seintoestellenfabriek.	Trompenbergerweg 47, Hilversum.
1941.	Ir. A. van Ganswijk. Ingenieur der Telegrafie en Telefonie.	van Weede van Dijkveldstraat 85, 's-Gravenhage.
1941.	Ir. M. Gevers. Werkzaam bij de N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken (Natuurkundig Laboratorium).	1e Wilakkerstraat 28, Eindhoven.
1940.	Ir. S. Gratama. Ingenieur bij het Physisch Laboratorium der P.T.T.	van Leijdenstraat 6, Voorburg (Z.-H.)
1924.	Ir. Y. B. F. J. Groeneveld. Werkzaam bij de N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken.	St. Jorislaan 10, Eindhoven.
1941.	Ir. E. A. de Groot. Werkzaam bij de N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken (Natuurkundig Laboratorium).	Boschdijk 451, Eindhoven.
1941.	Dr. J. Haantjes. Werkzaam bij de N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken (Natuurkundig Laboratorium).	Huygenslaan 16, Eindhoven.
1921.	Dr. J. ter Heerdt. R.K. Priester.	Vierakker, Post Vorden.
1934.	Ir. H. H. Heeroma. Ingenieur bij de Octrooiraad.	Storm van 's-Gravesandeweg 39, Wassenaar.
1924.	S. L. Hof. Hoofdinspecteur bij den Rijksluchtvaartdienst.	Cyclaamstraat 5, 's-Gravenhage.

1920.	Prof. Dr. G. Holst. Directeur van de N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken.	Huize „De Witte Berg", Aalst (N.-Br.)
1934.	Dr. H. C. Huizing. Leeraar Natuur- en Radiokunde.	Oostersingel 182, Groningen.
1920.	Ir. L. H. M. Huydts. Lector aan de Technische Hoogeschool.	Cornelis Speelmanstraat 38, 's-Gravenhage.
1941.	Ir. P. A. S. Huydts. Ingenieur bij de Rijksradio omroep „de Nederlandsche Omroep".	G. van Amstellaan 387, Hilversum.
1940.	Ir. H. F. Hylkema. Ingenieur bij de Telegraaf Maatschappij „Radio Holland".	Frans van Mierisstraat 61, Amsterdam-Z.
1920.	Ing. H. H. S. à Steringa Idzerda.	Parkweg 3, 's-Gravenhage.
1927.	Ir. D. J. de Jongh. Technisch Inspecteur bij de Fa. E. S. Orobio de Castro & Zn.	Hacquartstraat 26, Amsterdam-Z.
1941.	Ir. J. L. H. Jonker. Werkzaam bij de N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken (Natuurkundig Laboratorium).	Broerelaan 12, Eindhoven.
1920.	Dr. A. Koerts. Octrooigemachtigde.	Julianalaan 203, Bilthoven.
1920.	Prof. Dr. Ir. N. Koomans. Hoofdingenieur der Telegrafie en Telefonie, hoogleeraar aan de Technische Hoogeschool te Delft.	Belvedèreweg 1, 's-Gravenhage.
1920.	W. G. Kuyck. Directeur der Telegraaf-Maatschappij „Radio Holland".	Joseph Israëlsweg 9, Bloemendaal.

1928.	Ir. H. de Lange Dzn. Werkzaam bij de Nederlandsche Seintoestellenfabriek.	Kloosterpark, De Bilt.
1940.	Ir. L. A. W. van der Lek. Ingenieur der Telegrafie en Telefonie.	Park Leeuwenbergh 71, Stompwijk (Post Voorburg).
1925.	Ir. W. A. J. Liebert. Hoofdingenieur bij de Telegraaf Maatschappij „Radio Holland".	Noordereinde 203, 's-Graveland.
1941.	Ir. H. J. Lindenhovius. Werkzaam bij de N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken (Natuurkundig Laboratorium).	Jan Luikenstraat 38, Eindhoven.
1935.	Ir. C. G. A. von Lindern. Werkzaam bij de N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken (Natuurkundig Laboratorium).	Edenstraat 31, Eindhoven.
1938.	Ir. C. J. de Lussanet de la Sablonière. Werkzaam bij de Nederlandsche Seintoestellenfabriek.	A. Mauvelaan 2, Blaricum.
1941.	J. M. Madsen. Technisch Directeur der Rijksradio omroep „de Nederlandsche Omroep".	Weesperzijde 105, Amsterdam-O.
1929.	J. van der Mark. Werkzaam bij de N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken (Natuurkundig Laboratorium).	Lijsterlaan 3, Eindhoven.
1941.	W. Metzelaar. Electrotechnisch Ambtenaar der Telegrafie en Telefonie.	Celebesstraat 34, 's-Gravenhage.
1921.	A. J. M. Mulder.	„Berchmanium", Houtlaan 4, Nijmegen.

1940.	C. E. Mulders. Physicus bij het Physisch Laboratorium der P.T.T.	Adr. Mildersstraat 56a, Rotterdam.
1920.	Ir. P. J. H. A. Nordlohne. Werkzaam bij de Nederlandsche Seintoestellenfabriek.	Witte Kruislaan 15, Hilversum.
1926.	Ir. J. J. Numans. Directeur van het Numans-Laboratorium.	Koninginnegracht 2, 's-Gravenhage.
1921.	Ir. A. J. Odinot. Hoofdingenieur Procuratiehouder Nederlandsche Siemens Maatschappij.	Timorstraat 13, 's-Gravenhage.
1920.	Dr. E. Oosterhuis. Werkzaam bij de N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken (Natuurkundig Laboratorium).	Elzentlaan 7, Eindhoven.
1938.	Ir. J. Piket. Ingenieur bij het Physisch Laboratorium der P.T.T.	Weissenbruchstraat 129, 's-Gravenhage.
1920.	Prof. Dr. B. van der Pol. Werkzaam bij de N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken (Natuurkundig Laboratorium).	Parklaan 24, Eindhoven.
1926.	Ir. K. Posthumus. Werkzaam bij de N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken (Natuurkundig Laboratorium).	Pelikaanlaan 4, Eindhoven.
1941.	Ir. Raden Mas Prajitno Pringgoadisoerjo. Assistent Technische Hoogeschool.	Kanaalweg 2b, Delft.
1932.	Ir. J. Schalkwijk. Werkzaam bij de Nederlandsche Siemens Maatschappij.	Bilderdijklaan 86, Rijswijk (Z.H.).

1929.	Ir. F. H. P. Schotel. Ingenieur bij het Technisch Bureau van het Departement van Koloniën.	van Diepenburchstraat 26, 's-Gravenhage.
1922.	Ir. G. Schotel. Hoofdingenieur der Telegrafie en Telefonie.	Ruychrocklaan 180, 's-Gravenhage.
1941.	Ir. J. K. Schouten. Werkzaam bij de Nederl. Seintoestellenfabriek.	Lijsterbeslaan 30, Hilversum.
1941.	Ir. G. J. Siezen. Werkzaam bij de N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken.	Frederika van Pruisenlaan 28, Eindhoven.
1938.	B. Slikkerveer. Leeraar Wis- en Zeevaartkunde.	Dunklerstraat 6, 's-Gravenhage.
1941.	Ir. J. van Slooten. Werkzaam bij de N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken (Natuurkundig Laboratorium).	Uiverlaan 6, Eindhoven.
1928.	Ir. J. L. van Soest. Hoofd van het Physisch Laboratorium der P.T.T.	van Soutelandelaan 35, 's-Gravenhage.
1924.	A. Spaans. Inspecteur der P.T.T.	van Neckstraat 44, 's-Gravenhage.
1939.	L. F. Steehouwer. Leeraar aan de Gemeentelijke Zeevaartschool te Rotterdam.	Graaf Florislaan 74, Rotterdam.
1928.	Dr. Ir. M. J. O. Strutt. Werkzaam bij de N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken (Natuurkundig Laboratorium).	Joh. Vesterstraat 40, Eindhoven.
1920.	A. W. K. Tamson. Directeur van de Koninklijke Instrumenten Fabriek „Caminada en Tamson".	Riouwstraat 99, 's-Gravenhage.

1927.	Ir. B. D. H. Tellegen. Werkzaam bij de N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken (Natuurkundig Laboratorium).	Tongelreschestraat 193, Eindhoven.
1920.	P. C. Tolk.	Lindenheuvel 10, Hilversum.
1925.	Ir. J. M. Unk. Werkzaam bij de Nederl. Seintoestellenfabriek.	Suzannapark 13, Hilversum.
1931.	Ir. R. Veldhuyzen. Werkzaam bij de N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken.	Poirterslaan 40, Eindhoven.
1941.	C. C. Verbeek. Electrotechnisch Ambtenaar der Telegrafie en Telefonie.	Mient 2a, 's-Gravenhage.
1941.	Ir. J. J. Verschuur. Assistent Technische Hoogeschool.	Prins Mauritslaan 88, 's-Gravenhage.
1931.	Ir. J. C. Verton. Ingenieur der Telegrafie en Telefonie.	Radio Station Kootwijk-Radio (Post Apeldoorn).
1927.	Ir. J. J. Vormer. Hoofdingenieur der Telegrafie en Telefonie.	De Carpentierstraat 108, 's-Gravenhage.
1941.	Ir. J. N. Vos. Werkzaam bij de Nederlandsche Seintoestellenfabriek.	Joh. Geradtsweg 77, Hilversum.
1929.	Ir. C. H. de Vos. Hoofdingenieur der Telegrafie en Telefonie.	Riouwstraat 32, 's-Gravenhage.
1920.	Prof. Dr. J. D. van der Waals. Hoogleeraar aan de Gemeentelijke Universiteit te Amsterdam.	Willemsparkweg 204, Amsterdam-Z.
1920.	L. H. F. Wackers. Directeur der Telegraaf Maatschappij „Radio Holland".	Wassenaarscheweg 190, 's-Gravenhage.

1938.	L. van Waegeningh. Kapitein der Genie op N.A., Ingenieur bij de Rijkswaterstaat.	Willem III laan 26, Breda.
1941.	Ir. A. van Weel. Werkzaam bij de N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken (Natuurkundig Laboratorium).	Helmerslaan 55, Eindhoven.
1941.	Ir. W. Werner. Werkzaam bij de N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken.	Poirterslaan 4, Eindhoven.
1920.	H. Wesselius Oncken.	Oude Utrechtscheweg 8, Baarn.
1940.	H. J. Wetterau. Werkzaam bij de N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken.	Bilderdijklaan 114, Bilthoven.
1927.	Ir. Th. J. Weijers. Werkzaam bij de N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken (Natuurkundig Laboratorium).	Poirterslaan 50, Eindhoven.
1924.	G. J. D. J. Willemse.	Nieuwe Gracht 88, Utrecht.
1930.	Jhr. Ir. C. Th. F. van der Wijck. Ingenieur der Telegrafie en Telefonie.	Laan Copes van Cattenburch 74, 's-Gravenhage.
1938.	Ir. P. G. Zaaijer. Onderdirecteur „van der Heem" N.V.	Juliana van Stolberglaan 66, 's-Gravenhage.